

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Валерий Борисович
ГАСАНОВ Эльяр Эльдарович
ДОЛотоВА Оксана Александровна
ПОГОСЯН Грант Рафаелович

ТЕОРИЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Т.Н. Савицкая*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 07.06.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10. Уч.-изд. л. 11. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0727-3



9 333333 333333

УДК 519.71
ББК 22.18
К 88

Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Долотова О.А., Погосян Г.Р.
Теория тестирования логических устройств. / Под ред. В.А. Садовниче-
го. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 160 с. — ISBN 978-5-9221-0727-3.

Тестирование логических устройств — активно развивающееся научно-прикладное направление кибернетики, возникшее в середине прошлого столетия. Оно по праву связывается с именем С.В. Яблонского. Тематика направления группируется вокруг задач характеристики тестов и их построения и фокусируется на устройствах, представленных на макро- и структурном уровнях. В книге эта тематика раскрывается на модели логического устройства в его макровиде. Решаются задачи описания сложности тестов для устройств, реализующих булевы функции из классов Поста, а также функции k -значной логики. Приводятся соответствующие процедуры построения таких тестов.

Для студентов, аспирантов и специалистов в области надежности и контроля управляющих систем.

Табл. 3. Ил. 8. Библиогр. 78 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление	3
Предисловие редактора	7
Предисловие	8

I. Сложность тестов для k -значных логических устройств

Введение	12
Глава 1. Константные неисправности	15
1.1. Понятия и результаты	15
1.2. Вспомогательные утверждения	17
1.3. Верхние оценки для $L(n, C^k)$	27
1.4. Нижние оценки для $L(n, C^k)$	36
1.5. Подклассы из C^k	37
Глава 2. Неисправности типа слипания	41
2.1. Результаты	41
2.2. Верхние оценки для $L(n, S^k)$	42
2.3. Нижняя оценка для $L(n, S^k)$	45
2.4. Подкласс $S^k(p)$	46
Глава 3. Инверсные неисправности	47
3.1. Результаты	47
3.2. Верхняя оценка для $L(n, F_{in}^2)$	48
3.3. Нижние оценки для $L(n, F_{in}^2)$	50
3.4. Подкласс $F_{in}^2(1)$	52
Глава 4. Разнотипные неисправности	57
4.1. Классы разнотипных неисправностей	57
4.2. Инвариантность функций относительно неисправностей	60

II. Сложность контроля логических схем типа Поста

Основные понятия и результаты	66
Глава 5. Асимптотика функций Шеннона для классов Поста . . .	72
5.1. Классы типов S , P и L	72
5.2. Классы типов M и C	73
5.3. Классы типа F	78
5.4. Классы типа D	79
5.5. Оценки функций Шеннона для классов Поста	82
Глава 6. Сложность минимальных тестов для почти всех функций из классов Поста	84
6.1. Классы M_1 , M_2 , M_3 , M_4	84
6.2. Класс D_2	95
6.3. Классы D_1 , D_3	101
6.4. Классы F_2^2 , F_3^2 , F_6^2 , F_7^2	107
6.5. Классы F_1^2 , F_4^2 , F_5^2 и F_8^2	119
6.6. Остальные классы типа F	127
6.7. Сложность тестов для почти всех функций из классов Поста	129
Глава 7. О сложности минимальных тестов для классов Поста . .	131
7.1. Классы типов C , F и M	131
7.2. Классы типа D	134
Глава 8. Алгоритмы построения минимальных тестов для классов Поста	140
8.1. Классы типа C	140
8.2. Классы типов L , S , P	142
8.3. Классы типа M	143
8.4. Классы типа F	145
8.5. Классы типа D	148
Глава 9. Заключение	150
Список литературы	152

*Памяти выдающегося русского ученого
Сергея Всеволодовича Яблонского
посвящается*

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В предлагаемой читателям книге излагаются результаты по проблеме контроля логических устройств.

Эта проблема была поставлена в середине 50-х годов прошлого столетия выдающимся русским ученым С.В. Яблонским, который разработал оригинальный подход к ее исследованию, получивший название комбинаторно-логического.

В основе этого подхода лежит введенное им фундаментальное понятие теста, с которым связана вся исследовательская тематика этого направления. Сегодня оно охватывает не только логические устройства, но и другие виды управляющих систем.

Научное направление надежности и контроля управляющих систем представляет собой яркий пример раздела науки, которое возникло под влиянием практики, развилось как математическая теория и служит решению прикладных задач.

Этот стиль научной деятельности был характерен для С.В. Яблонского и реализовался им в других столь же важных разделах кибернетики, таких, как функциональные системы, синтез управляющих систем, дискретная оптимизация и основания кибернетики, которые были инициированы им и куда он внес выдающийся вклад.

Как теоретическое, направление надежности и контроля управляющих систем развивалось затем, главным образом, в МГУ им. М.В. Ломоносова и в Академии наук. В этой книге излагаются достижения этого направления, принадлежащие исследователям механико-математического факультета МГУ, представляющим научную школу кафедры математической теории интеллектуальных систем.

В книге в качестве основной модели управляющей системы рассмотрены случаи реализации логическими элементами вычислительной схемы функций двузначной и конечнозначной логик и главное внимание сосредоточено на сложности обнаружения возможных неисправностей в этих элементах с помощью тестов; обобщены постановки задач тестового контроля логических устройств, принадлежащие различным авторам, разработаны методы их решения, получены окончательные результаты по сложностной характеристике этих решений и предложены соответствующие алгоритмы. Все результаты являются оригинальными.

Книга будет полезной для исследователей и учащихся в области кибернетики.

Академик РАН
В. А. Садовничий

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дискретные вычислительные системы без памяти, называемые также логическими устройствами, играют все большую роль как в самой науке, так и в ее приложениях, а также в технике и быту.

Практически важной характеристикой таких устройств является надежность их функционирования. Необходимость обеспечения этого свойства привела к возникновению нового научного направления в кибернетике, которое получило название надежность и контроль управляющих систем и по праву связывается с именем С.В. Яблонского.

Здесь мы останавливаемся на изложении результатов по проверке правильности функционирования логических устройств, рассматриваемых не на структурном, а на макроуровне.

Решение этой задачи осуществляется с помощью тестового подхода, предложенного С.В. Яблонским [69]. Его суть состоит в следующем. Имеется некоторое логическое устройство с n входами и одним выходом (см. рис. 1). Предполагается, что это логическое устройство в исправном состоянии реализует функцию k -значной логики f от n переменных.

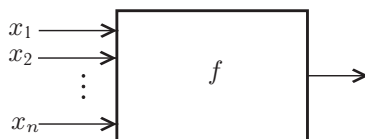


Рис. 1

Логическое устройство может сломаться, и при поломке оно «работает» иначе, реализуя другую функцию g (см. рис. 2), называемую функцией неисправности.

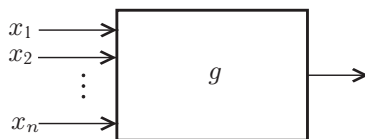


Рис. 2

Теперь если нам дано логическое устройство, то хотелось бы определить, не сломалось ли оно? То есть надо понять, какую функцию, f или g , оно реализует? Это можно сделать, подавая на вход устройству

по очереди все k^n наборов возможных значений входных переменных, затем снимая значения, выдаваемые устройством и сравнивая эти значения со значениями функций f и g на этих входных наборах. Но эта процедура в общем случае громоздка и становится еще более сложной, когда поломки в логическом устройстве не единичны и приводят к целому классу возможных функций неисправностей.

С. В. Яблонский предложил сравнивать f с функциями неисправностей на подобласти их определения, при этом если f на ней отличается от каждой из функций неисправностей, то подобласть называется тестом.

Структура множеств тестов, их построение, число тестов и элементов в них составили предмет исследований теории тестов.

Тесты позволяют определять, исправно ли логическое устройство не только на макроуровне, но и исследовать его структурно, углубляясь в его схему с целью обнаружения в случае поломки логического устройства самой неисправности.

Здесь мы предлагаем к рассмотрению две группы результатов.

В первом случае рассматриваются логические устройства, реализующие функции k -значной логики и выделяются классы типичных неисправностей на входах логических устройств. Для каждого класса неисправностей предлагаются процедуры построения тестов и доказываются, что построенные имеют минимальное число элементов.

Во втором случае уже только для обрывов и коротких замыканий на входах логических устройств в случае реализации ими булевых функций (т. е. функций 2-значной логики) для всей классификации Поста строятся простейшие тесты.

Полученные результаты дают возможность понять, как влияет на тесты и процедуры их построения значность рассматриваемой логики, а для двузначного случая позволяют определить сложность простейшего теста для логического устройства, если известно, какому замкнутому классу Поста принадлежит реализуемая устройством функция.

Следует отметить, что тестовый подход к распознаванию неисправностей логических устройств, как позже выяснилось, распространяем и на более общую ситуацию, когда логическое устройство интерпретируется как образ, а неисправности логического устройства — как искажения образа. В этом случае тестовый аппарат позволяет измерять меру такого искажения и служит средством распознавания образа с заданной точностью.

Излагаемые результаты выполнены на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и обобщают результаты этого направления, полученные ранее [47, 63, 69 и др.].

Книга может быть полезна для специалистов по надежности и контролю управляющих систем, для исследований и учебного процесса в этой области.

Авторы выражают свою признательность коллегам по кафедре математической теории интеллектуальных систем, интерес которых к тематике книги стимулировал ее создание, а также Т. Д. Уваровой и И. В. Кузнецовой, помогавшим авторам в ее подготовке.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку издания этой книги (грант РФФИ №06-01-14069).

Часть I

**СЛОЖНОСТЬ ТЕСТОВ ДЛЯ
K-ЗНАЧНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ
УСТРОЙСТВ**

ВВЕДЕНИЕ

В этой части рассматриваются логические устройства, реализующие функции k -значной логики. Считается, что такое устройство U реализует некоторую функцию f от n переменных из некоторого выделенного класса K функций k -значной логики, но может за счет поломок реализовать другую функцию. Если выделен класс F таких поломок, то устройство при каждой из них реализует, вообще говоря, свою функцию. Пусть при i -й поломке из F устройство U начинает реализовывать функцию f_i , где i принадлежит некоторому множеству индексов I . Таким образом возникает семейство функций $S_{f,F} = \{f\} \cup \{f_i : i \in I\}$. Считается, что можно осуществлять вычисления значений этих функций на наборах значений их переменных. Множество T наборов значений этих переменных называется *тестом* для $S_{f,F}$, если на T функция f отличима от каждой из функций f_i . Это понятие ввел С. В. Яблонский [69] и оно стало ключевым в задачах контроля работы логических устройств. Для заданного U может существовать много тестов и естественно использовать для проверки правильности работы U простейшие тесты, например, по числу $L(f, F)$ наборов в них. Поведение величины $L(f, F)$, а также построение самих тестов T , составляют предмет исследований в теории контроля логических устройств. Естественным огрублением величины $L(f, F)$ является переход к рассмотрению величины $L_K(n, F)$, равной минимально достаточному значению, когда для всякой функции f от n переменных из K находится тест T такой, что $|T| \leq L_K(n, F)$. Эта функция Шеннона, как правило, и находится в центре внимания при контроле логических устройств.

Отметим, что основными свободными параметрами, порождающими многообразие ситуаций, подлежащих изучению, являются здесь классы функций, реализуемых логическими устройствами, и классы их поломок.

Выделяются три основных типа неисправностей логических устройств, почерпнутые из инженерной практики: константные, слипания и инверсные.

Константные неисправности соответствуют фиксации входного сигнала на некотором входе U , слипание — ошибочной спайке входных каналов, инвертирование — случайному подключению ко входу многозначного инвертора.

В каждом из этих случаев для функций из P_k (класса всех функций k -значной логики) изучается поведение соответствующих функций Шеннона и устанавливается их явный вид. Техника получения верхних и нижних оценок для функций Шеннона, используемая здесь, позволяет извлечь алгоритмы построения тестов, близких к оптимальным.

Все результаты являются оригинальными и опираются на выявление и использование комбинаторных свойств специальных семейств подмножеств n -мерного k -значного куба, ассоциированных с явлением теста.

Изучению различных характеристик тестов посвящен целый ряд работ [46, 63, 66 и др.] Предлагаемый здесь подход и разработанная техника позволили на многие из вопросов, исследуемых в этих работах, получить окончательные ответы.

Основные факты этой части представлены в работе [54].

КОНСТАНТНЫЕ НЕИСПРАВНОСТИ

1.1. Понятия и результаты

Пусть

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, k, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$;

$N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ — начальный отрезок натурального ряда длины m ;

$E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$;

E_k^n — множество всех наборов $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E_k$ для каждого $i \in N_n$. Множество E_k^n также называют *k-значным n-мерным кубом*;

$f^n: E_k^n \rightarrow E_k$ — отображения *k-значной логики*, множество всех таких отображений обозначают через P_k^n ;

$P_k^{n,m}$ — множество всех отображений $f^{n,m}: E_k^n \rightarrow E_k^m$, называемых *m-мерными отображениями k-значной логики*;

$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — множество переменных, значения которых принадлежат E_k .

Тогда при $X^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ для отображения $f^{n,m}$ используем запись $f^{n,m}(x_1, \dots, x_n)$ и, как принято, называем отображение в такой записи *m-мерной функцией k-значной логики*, а при $m = 1$, соответственно *функцией k-значной логики*.

Функции $f^n(x_1, \dots, x_n)$ и $g^n(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n называются *равными*, если для любого $\tilde{\alpha}^n \in E_k^n$ выполняется $f^n(\tilde{\alpha}^n) = g^n(\tilde{\alpha}^n)$.

Переменная x_i называется *существенной* для функции $f^n(x_1, \dots, x_n)$, если существуют два набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, такие, что для любого $j \in N_n$ при $j \neq i$ выполнено $\alpha_j = \beta_j$ и $f^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f^n(\beta_1, \dots, \beta_n)$. В противном случае переменная x_i называется *фиктивной* для функции $f^n(x_1, \dots, x_n)$.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3,$$

где «+» и «·» — сложение и умножение по модулю k . Понятно, что переменная x_3 — фиктивная, так как значение функции не зависит

от значения переменной x_3 . С другой стороны, переменная x_1 существенная, так как существуют два набора, например $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0)$, отличающиеся только по первой координате, что функция на этих наборах принимает разные значения, в самом деле, $f(1, 0, 0) = 1$, а $f(0, 0, 0) = 0$.

Функция $\varphi^{n,n}(x_1, \dots, x_n)$ из $P_k^{n,n}$ по отношению к $f^n(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^n называется *неисправностью на входе*, или просто *неисправностью*.

Устройство, полученное из устройства, изображенного на рис. 1, при наличии неисправности на входе $\varphi^{n,n}$, схематически изображено на рис. 3.

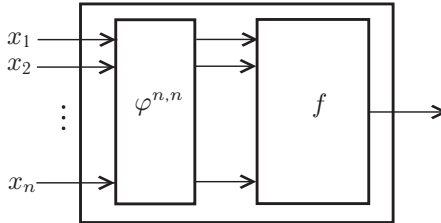


Рис. 3

Говорят, что неисправность $\varphi^{n,n}(\tilde{x})$ является *ошибкой* для $f^n(\tilde{x})$, если выполнено $f^n(\tilde{x}) \neq f^n(\varphi^{n,n}(\tilde{x}))$.

Понятно, что не всякая неисправность является ошибкой. В самом деле, если f^n — симметричная функция, а $\varphi^{n,n}$ реализует некоторую перестановку входов, то $f^n(\varphi^{n,n}(\tilde{x})) = f^n(\tilde{x})$, и, значит, $\varphi^{n,n}$ не ошибка для f^n .

Пусть $F \subseteq P_k^{n,n}$ и $T \subseteq E_k^n$; говорят, что T является *проверяющим тестом* для $f^n(x_1, \dots, x_n) \in P_k^n$ относительно F , если для всякой ошибки $\varphi^{n,n}(x_1, \dots, x_n) \in F$ для $f^n(x_1, \dots, x_n)$ найдется $\tilde{\alpha}^n$ из T , такое, что $f(\tilde{\alpha}^n) \neq f(\varphi^{n,n}(\tilde{\alpha}^n))$.

Для краткости иногда вместо $f^n(x_1, \dots, x_n)$ будем писать f^n .

Пусть $\mathcal{M}(f^n, F)$ — множество всех тестов функции $f^n(x_1, \dots, x_n)$ относительно F .

Обозначая через $|A|$ мощность множества A , положим

$$L(f^n(x_1, \dots, x_n), F) = \min_{T \in \mathcal{M}(f^n, F)} |T|$$

— тестовая сложность функции f^n относительно класса неисправностей F .

Тест $T \in \mathcal{M}(f^n, F)$ называется *тупиковым*, если из включения $T' \subset T$ следует, что $T' \notin \mathcal{M}(f^n, F)$; *минимальным*, если $|T| = L(f^n(x_1, \dots, x_n), F)$.

По определению положим

$$L(n, F) = \max_{f^n \in P_k^n} L(f^n(x_1, \dots, x_n), F)$$

— функция Шеннона тестовой сложности для класса функций, зависящих от n переменных, относительно класса неисправностей F .

Для α из E_{k+1} и β, γ из E_k определяем $\gamma = \alpha * \beta$ так, что $\gamma = \alpha$, если $\alpha < k$, и $\gamma = \beta$, если $\alpha = k$. Операцию $*$ распространяем на $\tilde{\alpha}^n$ из E_{k+1}^n и $\tilde{\beta}^n, \tilde{\gamma}^n$ из E_k^n , полагая $\tilde{\gamma}^n = \tilde{\alpha}^n * \tilde{\beta}^n = (\alpha_1 * \beta_1, \dots, \alpha_n * \beta_n)$.

Пусть $\tilde{\gamma}^n \in E_{k+1}^n \setminus (k, \dots, k)$ и $\varphi_{\tilde{\gamma}^n}^{n,n}(x_1, \dots, x_n)$ такие, что для любого $\tilde{\alpha}^n$ из E_k^n выполнено $\varphi_{\tilde{\gamma}^n}^{n,n}(\tilde{\alpha}^n) = (\gamma_1 * \alpha_1, \dots, \gamma_n * \alpha_n)$. Класс всех таких $\varphi_{\tilde{\gamma}^n}^{n,n}(x_1, \dots, x_n)$ обозначим через C^k и назовем *классом константных неисправностей* для P_k^n .

Если $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, то константная неисправность $\varphi_{\tilde{\gamma}^n}^{n,n}$ схематически может быть изображена как на рис. 4.

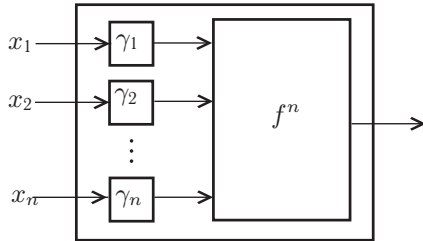


Рис. 4

Здесь, если $\gamma_i = k$, то блок со значком γ_i реализует тождественную функцию, т. е. выдает на своем выходе то, что поступило ему на вход. Если же $\gamma_i \neq k$, то блок со значком γ_i реализует константу γ_i , т. е. выдает на своем выходе γ_i независимо от входа.

Основным результатом этой главы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Для любых $n \geq 1$ и $k \geq 2$

$$L(n, C^k) = \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t, \end{cases}$$

— функция Шеннона тестовой сложности для класса функций, зависящих от n переменных, относительно класса константных неисправностей C^k .

Кратностью неисправности $\varphi_{\tilde{\gamma}^n} \in C^k$ назовем число координат набора $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, не равных k . Множество всех неисправностей из C^k , имеющих кратность не более, чем p , обозначим через $C^k(p)$.

Теорема 2. Для любых $n \geq 1$, $k \geq 2$ и $p \in N_n$ имеем $L(n, C^k(p)) = L(n, C^k)$.

Пусть $M \subseteq E_k$. Положим, $C_M^k = \{\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^k : \forall i \in N_n (\gamma_i \in M \cup \{k\})\}$, т. е. C_M^k — множество неисправностей со значениями констант из M . Если $|M| = 1$ и $M = \{\mu\}$, то вместо C_M^k будем писать C_μ^k .

Для этих подклассов будет установлено следующее.

Теорема 3. Для любых $n \geq 1$, $k \geq 2$ и $\mu \in E_k$ выполнено

$$L(n, C_\mu^k) = n.$$

Теорема 4. Для любых $n \geq 1$, $k \geq 2$ и $M \subseteq E_k$ такого, что $|M| \geq 2$, справедливо $L(n, C_M^k) = L(n, C^k)$.

1.2. Вспомогательные утверждения

Если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — такие наборы из E_k^n , что $\alpha_i = \beta_i$ при $i \neq l$ и $\alpha_l \neq \beta_l$, $l \in N_n$, то пару $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ назовем l -ребром. Будем также называть эти наборы *соседними по l -й компоненте*.

l -ребро $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ назовем *существенным для функции $f \in P_k^n$* , если $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$.

Обозначим через $R(l, f)$ множество всех существенных l -ребер для функции f .

Легко видеть, что имеет место предложение.

Лемма 1. Функция $f \in P_k^n$ существенно зависит от переменной $x_l \in X^n$ тогда и только тогда, когда $R(l, f) \neq \emptyset$.

Пусть $f \in P_k^n$, $l \in N_n$, $\nu \in E_k$, положим

$$R_\nu(l, f) = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_k^n : \alpha_l = \nu, \exists \beta \in E_k^n \ ((\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(l, f))\},$$

т. е. $R_\nu(l, f)$ образует множество наборов с равным ν значением l -й координаты, являющихся концами существенных l -ребер функции f .

Предложение 1. Если $f \in P_k^n$, $T \subseteq E_k^n$, $M \subseteq E_k$, $M \neq \emptyset$, то при $T \in \mathcal{M}(f, C_M^k)$ для любых $x_l \in X^n$ и $\mu \in M$ существует $\nu \in E_k$ такое, что $\nu \neq \mu$ и выполнено $R(l, f) = \emptyset$ или $R_\nu(l, f) \cap T \neq \emptyset$.

Доказательство. Утверждение означает, что для любой существенной переменной x_l функции f и любого $\mu \in M$ существует существенное l -ребро функции f , один конец которого принадлежит тесту и имеет в l -й компоненте значение отличное от μ .

Предположим обратное, пусть для некоторых $x_l \in X^n$ и $\mu \in M$ выполнено $R(l, f) \neq \emptyset$ и для любого $\nu \in E_k$ при $\nu \neq \mu$ выполнено $R_\nu(l, f) \cap T = \emptyset$. Рассмотрим неисправность $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C_M^k$ такую, что $\gamma_i = k$ при $i \neq l$ и $\gamma_l = \mu$. Очевидно, что для этой неисправности и любого

набора $\tilde{\alpha} \in T$ имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}))$, тогда как из условия $R(l, f) \neq \emptyset$ следует, что существует набор $\beta \in E_k^n$, удовлетворяющий неравенству $f(\beta) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\beta))$. Следовательно, получаем $T \notin \mathcal{M}(f, C_M^k)$, что завершает доказательство. \square

Предложение 2. Если $f \in P_k^n$, $T \subseteq E_k^n$ и для любого $x_l \in X^n$ такого, что $R(l, f) \neq \emptyset$, найдутся два набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из T , для которых выполнено $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(l, f)$, то $T \in \mathcal{M}(f, C^k)$.

Доказательство. Утверждение означает, что если для любой существенной переменной x_l функции f найдутся два соседних по компоненте l набора из множества T , на которых функция f принимает различные значения, то T — тест функции f для класса всех константных неисправностей.

Пусть x_i — существенная переменная функции f , а $\varphi_{\tilde{\gamma}}$ — такая произвольная неисправность из C^k , что $\gamma_i \neq k$. Рассмотрим наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из T такие, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(i, f)$. Очевидно, что $\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}) = \varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta})$, и, так как $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$, то получаем $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}))$ или $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta}))$. \square

В качестве следствия из предложения 2 получаем очень простой способ построения теста. Для каждой существенной переменной x_l функции берется некоторое существенное l -ребро и концы этого l -ребра включаются в тест. Отсюда получается простая верхняя оценка для $L(f, C^k)$.

Следствие. Для любой функции $f \in P_k^n$ выполняется $L(f, C^k) \leq 2n$.

Функцию f' называем *подфункцией* функции $f \in P_k^n$, если f' получается из f подстановкой констант из E_k вместо каких-нибудь ее переменных, т. е. $f' = f(\varphi)$ для некоторой неисправности $\varphi \in C^k$.

Введем следующие обозначения:

B_k^n — множество функций из P_k^n , существенно зависящих от всех переменных из X^n ;

$P(f)$ — множество всех подфункций функции f ;

$P(Y, f)$ — множество всех подфункций функции $f \in P_k^n$, зависящих фиктивно от всех переменных из $X^n \setminus Y$, $Y \subseteq X^n$;

$P^*(Y, f)$ — множество всех подфункций функции $f \in P_k^n$, существенно зависящих, по крайней мере, от всех переменных из Y , $Y \subseteq X^n$;

$P^\circ(Y, f) = P(Y, f) \cap P^*(Y, f)$.

Нетрудно видеть, что при $n_1 < n_2$ имеет место неравенство $L(n_1, C^k) < L(n_2, C^k)$, и, следовательно, равенство $L(f, C^k) = L(n, C^k)$

выполняется для функций из множества B_k^n . Поэтому мы далее будем рассматривать функции из B_k^n . При этом отпадет необходимость оговорки условия «если для $x_l \in X^n$ имеет место $R(l, f) \neq \emptyset$ », так как для функций из B_k^n , как следует из леммы 1, выполнено $R(l, f) \neq \emptyset$ для любой $x_l \in X^n$.

Переменные x_i и x_j из X^n назовем *связными* для функции $f \in B_k^n$, если $P^\circ(\{x_i, x_j\}, f) \neq \emptyset$. Сказанное означает, что у функции f существует подфункция, существенно зависящая точно от переменных x_i и x_j .

Подмножество $Y(f)$ множества переменных X^n назовем *несвязным множеством* функции $f \in B_k^n$, если любые две переменные из $Y(f)$ не связны для f .

Пусть $\sigma(f) = \max_{Y(f)} |Y(f)|$, где максимум берется по всем несвязным множествам функции f , тогда несвязное множество $Y(f)$, для которого выполнено $|Y(f)| = \sigma(f)$, называем *максимальным несвязным множеством* функции f .

Коэффициентом связности функции $f \in B_k^n$ назовем величину $\tau(f) = n - \sigma(f)$.

Величины $\sigma(f)$ и $\tau(f)$ для каждой функции $f \in B_k^n$ определяются однозначно, тогда как максимальных несвязных множеств у f может оказаться много.

Для f из P_k полагаем, что $X(f)$ есть множество всех существенных переменных функции f . Если $x_{i_j} \in X(f)$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, и $a_{i_j} \in E_k$, то через $f_{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}}^{i_1, \dots, i_r}$ обозначим функцию, получающуюся из f подстановкой в нее вместо каждого x_{i_j} значения a_{i_j} .

Лемма 2. ¹⁾ Если $k \geq 2$, $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и $|X(f)| = n$, то для некоторых i , $1 \leq i \leq n$, и $a_i \in E_k$ выполнено $|X(f_{a_i}^i)| = n - 1$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда $|X(f_a^i)| < n - 1$ для всех i и a . Выберем i и a такие, что число $|X(f_a^i)|$ максимально. Можно считать, что $i = 1$, а $x_2 \notin X(f_a^i)$. Значит, $f_a^1 = f_{ab}^{12}$ при всех $b \in E_k$. Так как $x_1 \in X(f)$, то для некоторого $c \in E_k$ имеем $f_a^1 \neq f_c^1$. Значит, найдется $d \in E_k$ такое, что $f_{ad}^{12} \neq f_{cd}^{12}$. Так как $f_{ad}^{12} = f_a^1$, то $X(f_d^2) \supseteq X(f_a^1)$. Поскольку $f_{ad}^{12} \neq f_{cd}^{12}$, то $x_1 \in X(f_d^2)$. Значит, $|X(f_d^2)| > |X(f_a^1)|$, что противоречит выбору f_a^1 . \square

Следствие. Для любых $f \in B_k^n$ и $t \in N_n$ существует подфункция функции f , существенно зависящая ровно от t переменных.

¹⁾ Эта лемма обобщает утверждение из [38], установленное там для $k = 2$.

Лемма 3. Если $k^{t-1} + t \leq n \leq k^t + t$, то для любой функции $f \in B_k^n$ имеет место $\tau(f) \geq t$.

Доказательство. Пусть для функции $f \in B_k^n$ выполнено $\tau(f) < t$ и $Y(f)$ — ее максимальное несвязное множество. Ясно, что $|P(Y(f), f)| \leq k^{\tau(f)}$. Так как всегда при $x_i \in Y(f)$ выполнено $P(Y(f), f) \cap P^*(\{x_i\}, f) \neq \emptyset$, то

$$|P(Y(f), f)| \geq |Y(f)| = \sigma(f) = n - \tau(f) \geq k^{t-1} + t - \tau(f).$$

Следовательно, $k^{\tau(f)} + \tau(f) \geq k^{t-1} + t$, т. е. $\tau(f) \geq t$. \square

Пусть $Y(f)$ — максимальное несвязное множество функции $f \in B_k^n$. Рассмотрим некоторую подфункцию g из $P^*(Y(f), f)$. Положим $\delta_o(g) = |Z| - \sigma(f)$, где Z — такое подмножество множества X^n , что $g \in P^o(Z, f)$, т. е. $|Z|$ — число существенных переменных функции g . Пусть $\delta(f) = \min_{Y(f)} \min_{g \in P^*(Y(f), f)} \delta_o(g)$. Нетрудно видеть, что $\delta(f) \leq \tau(f)$.

Для функции $f \in B_k^n$ через X_f^σ и X_f^δ обозначим такие подмножества переменных из X^n , для которых выполнено: $|X_f^\sigma| = \sigma(f)$, X_f^σ — максимальное несвязное множество функции f , $|X_f^\delta| = \delta(f)$, $X_f^\sigma \cap X_f^\delta = \emptyset$, $P^o(X_f^\sigma \cup X_f^\delta, f) \neq \emptyset$.

Положим $X_f^\tau = X^n \setminus X_f^\sigma$, $X_f^{\tau-\delta} = X_f^\tau \setminus X_f^\delta$ и $X_f^{\sigma+\delta} = X_f^\sigma \cup X_f^\delta$.

Если $f \in B_k^n$ и $Y \in X^n$, то $I(Y, f)$ обозначает подмножество множества E_k^n такое, что для любого $x_i \in Y$ в $I(Y, f)$ найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ со свойством $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(i, f)$, причем $|I(Y, f)| \leq 2|Y|$. Таким образом $I(Y, f)$ является множеством наборов, тестирующих переменные из Y .

Если f' — подфункция функции f , причем $f' = f(\varphi)$, где $\varphi \in C^k$, то полагаем

$$E_k^n(f') = \{\tilde{\alpha} \in E_k^n : \exists \tilde{\beta} \in E_k^n \quad (\varphi(\tilde{\beta}) = \tilde{\alpha})\}.$$

Для подфункции f' функции $f \in B_k^n$ и любого подмножества $Y \subseteq X^n$, такого, что $f' \in P^*(Y, f)$ (т. е. f' существенно зависит от всех переменных из Y) через $I(Y, f')$ будем обозначать подмножество множества $E_k^n(f')$ такое, что для любого $x_i \in Y$ в $I(Y, f')$ найдутся наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, такие, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(i, f)$, причем $|I(Y, f')| \leq 2|Y|$.

Лемма 4. Если $f \in B_k^n$, то $L(f, C^k) \leq 2n - 2\delta(f)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию h из множества $P^o(X_f^{\sigma+\delta}, f)$. Положим $T_1(f) = I(X_f^\sigma, h) \cup I(X_f^{\tau-\delta}, f)$. Покажем, что $T_1(f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$. Пусть $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^k$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Возможны два случая.

а) Существует переменная x_i из множества $X_f^\sigma \cup X_f^{\tau-\delta}$ такая, что $\gamma_i \neq k$. Тогда для наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из $T_1(f)$, составляющих существенное ребро $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(i, f)$, имеет место $\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}) = \varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta})$. Следовательно, выполнено либо $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}))$, либо $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta}))$.

б) Для всех $x_i \in X_f^\sigma \cup X_f^{\tau-\delta}$ имеем $\gamma_i = k$. Существует $x_l \in X_f^\delta$, для которой $\gamma_l = m \neq k$. Из определения $\delta(f)$ следует, что для любых $x_l \in X_f^\delta$ и $m \in E_k$ существует $x_s \in X_f^\sigma$ такая, что $h_m^l \notin P^*({x_s}, f)$, где h_m^l — подфункция из $P(X_f^{\sigma+\delta} \setminus \{x_l\}, h)$, полученная заменой $x_l = m$. Таким образом, h_m^l не зависит существенно от x_s , поскольку в противном случае h_m^l существенно зависит от всех переменных из X_f^σ , что противоречит минимальности $\delta(f)$. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — два набора из $I(X_f^\sigma, h)$ такие, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(s, f)$. Тогда из того, что $h_m^l \notin P^*({x_s}, f)$ и $\gamma_l = m$, получаем $f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha})) = f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta}))$. Следовательно, либо $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}))$, либо $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta}))$. Из а) и б) следует, что $T_1(f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$, откуда получаем

$$L(f, C^k) \leq |T_1(f)| \leq 2n - 2\delta(f). \quad \square$$

Четверку $\langle h_o, x_{l_o}, \nu_o, I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \rangle$ назовем *опорной четверкой функции f* , если $h_o \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$, $x_{l_o} \in X_f^{\tau-\delta}$, $\nu_o \in E_k$, $I^\circ(X_f^\sigma, h)$ такие, что $I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \cap R_{\nu_o}(l_o, f) \neq \emptyset$.

Лемма 5. Если $X_f^{\tau-\delta} \neq \emptyset$, то опорная четверка функции f существует.

Доказательство. Предполагая противное, получаем, что для любого $x_l \in X_f^{\tau-\delta}$ множество $X_f^\sigma \cup \{x_l\}$ является несвязным множеством функции f . Это противоречит максимальной несвязности множества X_f^σ . \square

Лемма 6. Имеют место случаи:

- а) если $k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$, то при $\delta(f) \geq t$ выполнено $L(f, C^k) \leq 2n - 2t$;
 б) если $n = k^{t-1} + t$, то при $\delta(f) \geq t - 1$ выполнено $L(f, C^k) \leq 2n - 2t + 1$.

Доказательство. Случай а) является следствием леммы 4. В случае б), поскольку в силу леммы 3 выполнено $\tau(f) \geq t$, то при $\delta(f) = t - 1$ имеем $X_f^{\tau-\delta} \neq \emptyset$. Пусть $\langle h_o, x_{l_o}, \nu_o, I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \rangle$ — опорная четверка функции f и $(\tilde{\alpha}_o, \tilde{\beta}_o) \in R(l_o, f)$, причем $\tilde{\alpha}_o \in I^\circ(X_f^\sigma, h_o)$. Нетрудно заметить, что $T_1^\circ(f) = I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \cup \{\tilde{\beta}_o\} \cup I(X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_o}\}, f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$. Откуда следует, что

$$L(f, C^k) \leq |T_1^\circ(f)| \leq 2n - 2t + 1. \quad \square$$

Лемма 7. Если $f \in B_k^n$, то $\sigma(f) \leq k^{\delta(f)}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $P(X_f^\sigma, h)$ для $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$. Имеем $|P(X_f^\sigma, h)| = k^{\delta(f)}$. Но $|P(X_f^\sigma)| \geq |X_f^\sigma| = \sigma(f)$, что и требовалось доказать. \square

Лемма 8. Имеют место случаи:

- а) если $k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$ и $\tau(f) = t$, то $\delta(f) \geq t$;
 б) если $n = k^{t-1} + t$ и $\tau(f) = t$, то $\delta(f) \geq t - 1$.

Доказательство. а) Пусть $\delta(f) \leq t - 1$, тогда $\sigma(f) \leq k^{t-1}$. С другой стороны, $\sigma(f) = n - \tau(f) = n - t > k^{t-1}$, пришли к противоречию.

б) Пусть $\delta(f) \leq t - 2$, тогда $\sigma(f) \leq k^{t-2}$ и $\sigma(f) = n - \tau(f) = n - t = k^{t-1}$, что невозможно. \square

Из лемм 6 и 8 вытекает, что для доказательства верхних оценок для $L(n, C^k)$ достаточно рассмотреть функции f из B_k^n , для которых

$$\delta(f) < t < \tau(f) \quad \text{при} \quad k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$$

и

$$\delta(f) + 1 < t < \tau(f) \quad \text{при} \quad n = k^{t-1} + t.$$

Однако отмеченные пока связи между переменными в этих случаях оказываются недостаточными для полного достижения цели. Приведем еще ряд лемм, раскрывающих другие закономерности, возникающие из свойств максимального несвязного множества.

Напомним некоторые понятия из теории графов.

Графом (простым неориентированным графом), будем называть пару (V, W) , где V называется множеством вершин, а W — множеством ребер, причем W есть некоторое множество двуэлементных подмножеств множества V . Если $a, b \in V$ и $\{a, b\} \in W$, то говорят, что вершины a и b являются концами ребра $\{a, b\}$, а также что ребро $\{a, b\}$ инцидентно вершинам a и b , и что a и b инцидентны ребру $\{a, b\}$, при этом вершины a и b называются смежными. Для ребра $\{a, b\}$ мы будем также использовать обозначение (a, b) .

Граф (V, W) называется *двудольным*, если существуют такие множества V' и V'' , что $V' \cup V'' = V$, $V' \cap V'' = \emptyset$ и для любого ребра из W один его конец принадлежит V' , а другой — V'' . Иными словами, никакие две вершины из V' , равно как никакие две вершины из V'' , не смежны. При этом множества V' и V'' называются *долями* множества вершин V . Когда говорят, что граф $(V' \cup V'', W)$ является *двудольным*, то часто подразумевают, что V' и V'' — доли его множества вершин.

Пусть $(V' \cup V'', W)$ — двудольный граф, $A \subseteq V'$. Через $V''(A)$ обозначим множество, состоящее из всех вершин из V'' , которые соединены ребром хотя бы с одной вершиной из A . Величину $\Delta(A) = |A| - |V''(A)|$ будем называть *дефицитом* подмножества A . Если $A \subseteq V'$ и $A' \subseteq V'/$, то будем говорить, что имеется *паросочетание* A на A' , если существует такое взаимно однозначное соответствие между A и A' , что соответствующие друг другу вершины соединены ребром.

Определим граф $G = (X_f^{\tau-\delta} \cup X_f^\sigma, W)$. Включение $(x_i, x_j) \in W$ имеет место точно тогда, когда x_i и x_j связны для функции f .

Отметим некоторые свойства графа G .

Свойство 1. В подмножестве X_f^σ множества вершин графа G нет смежных вершин.

Свойство 2. Каждая вершина из $X_f^{\tau-\delta}$ смежна хотя бы с одной вершиной из X_f^σ .

Свойство 3. Если $\tau(f) - \delta(f) > \sigma(f)$, то в множестве $X_f^{\tau-\delta}$ найдется пара смежных вершин.

Все три сформулированные свойства графа G следуют из определения максимального несвязного множества X_f^σ .

Преобразуем граф G следующим образом. Поочередно удалим пары смежных вершин из $X_f^{\tau-\delta}$ вместе с инцидентными ребрами. Получим подграф $G_\omega = (X_f^\sigma \cup X^\omega, W_\omega)$, являющийся двудольным графом, поскольку полученное подмножество X^ω множества $X_f^{\tau-\delta}$ также является несвязным множеством функции f . Положим $|X^\omega| = \omega$. Тогда из свойства 3 графа G имеем $0 \leq \omega \leq \sigma(f)$.

Лемма 9. В графе G_ω существует паросочетание множества X^ω на некоторое подмножество $X_f^\sigma(\omega)$ множества X_f^σ такое, что $|X_f^\sigma(\omega)| = \omega$.

Доказательство. Воспользуемся основной теоремой о паросочетаниях [49]. Из нее следует, что для существования указанного паросочетания в графе G_ω необходимо и достаточно, чтобы множество X^ω не имело дефицита, т. е. никакое подмножество $Y \subseteq X^\omega$ не имело положительного дефицита. Обозначим через $Y(\sigma)$ множество всех вершин из X_f^σ , которые имеют хотя бы одну смежную вершину в Y . Напомним, что дефицит $\Delta(Y)$ множества Y определяется соотношением $\Delta(Y) = |Y| - |Y(\sigma)|$. Пусть для $Y \subseteq X^\omega$ имеет место $\Delta(Y) > 0$. Тогда множество $(X_f^\sigma \setminus Y(\sigma)) \cup Y$ будет несвязным множеством функции f , причем большей мощности, чем X_f^σ . Полученное противоречие доказывает лемму. \square

Пусть $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$. Определим граф $G_{h,\delta} = (X_f^\delta \cup X_f^\sigma, W_\delta)$ с помеченными ребрами. Включение $(x_i, x_j)_\nu \in W_\delta$ (с точностью до ориентации) имеет место точно тогда, когда $x_i \in X_f^\delta$, $x_j \in X_f^\sigma$, $\nu \in E_k$ и h_ν^i зависит фиктивно от x_j . Очевидно, что помеченный мультиграф G_δ является двудольным с долями вершин X_f^δ и X_f^σ .

Подграф $G'_{h,\delta} = (X_f^\delta \cup Y, W'_\delta)$ графа $G_{h,\delta}$, где $Y \subseteq X_f^\sigma$, назовем δ -полным, если для любых $x_i \in X_f^\delta$ и $\nu \in E_k$ существует $x_j \in Y$ такое, что $(x_i, x_j)_\nu \in W'_\delta$.

Из определения характеристики $\delta(f)$ вытекает, что граф $G_{h,\delta}$ является δ -полным.

Лемма 10. Если $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$ и $\sigma(f) \geq \frac{1}{2}k^{\delta(f)} + t$, где $t \geq 1$, то

$$|\{x_i \in X_f^\sigma : |P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)| = 1\}| \geq 2t.$$

Доказательство. Обозначим $Z = \{x_i \in X_f^\sigma : |P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)| = 1\}$. Заметим, что для любая функция $g \in P(X_f^\sigma, h)$ существенно зависит не более, чем от одной переменной. Кроме того, если $x_i \in X_f^\sigma$, то $P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h) \neq \emptyset$. Поэтому если $x_i \in X_f^\sigma \setminus Z$, то $|P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)| \geq 2$. С учетом этого имеем

$$k^{\delta(f)} \geq |P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_s}, h)| \geq |Z| + 2(\sigma(f) - |Z|) \geq k^{\delta(f)} + 2t - |Z|.$$

Следовательно, $|Z| \geq 2t$. \square

Лемма 11. Если $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$ и $\sigma(f) > \frac{1}{2}k^{\delta(f)}$, то у графа $G_{h,\delta}$ существует δ -полный подграф $G_{h,\delta}^\varepsilon = (X_f^\delta \cup X^\varepsilon, W_\delta^\varepsilon)$ такой, что $|X^\varepsilon| \leq \delta(f) + 1$.

Доказательство. Обозначим через Z подмножество X_f^σ , состоящее из всех переменных x_i таких, что $|P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)| = 1$. Согласно лемме 10 $Z \neq \emptyset$, т.е. в X_f^σ имеется переменная x_s , для которой существует единственная подстановка в функцию h констант вместо переменных из X_f^δ , которая дает подфункцию из множества $P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_s}, h)$, т.е. подфункцию, существенно зависящую от x_s . Пусть эта подстановка такова, что вместо каждой переменной $x_i \in X_f^\delta$ подставляется константа λ_i .

Рассмотрим произвольную переменную $x_i \in X_f^\delta$. Для любого числа $\nu \neq \lambda_i$ в силу единственности указанной подстановки имеет место $(x_i, x_s)_\nu \in W_\delta$. В силу δ -полноты графа $G_{h,\delta}$ для пары x_i, λ_i существует

такая переменная $x'_i \in X_f^\sigma$, что $(x_i, x'_i)_{\lambda_i} \in W_\delta$. Положим

$$X^\varepsilon = \{x_s\} \cup \{x'_i : i = 1, 2, \dots, \delta(f)\}.$$

Поскольку $|X^\varepsilon| \leq \delta(f) + 1$, то подграф $G_{h,\delta}^\varepsilon = (X_f^\delta \cup X^\varepsilon, W_\delta^\varepsilon)$ графа $G_{h,\delta}$, порожденный на вершинах $X_f^\delta \cup X^\varepsilon$, является искомым δ -полным подграфом. \square

Лемма 12. *Если $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$, $\delta(f) \geq 1$ и $\sigma(f) > \frac{1}{2}(k^{\delta(f)} + k^{\delta(f)-1})$, то у графа $G_{h,\delta}$ существует δ -полный подграф $G_{h,\delta}^\varepsilon = (X_f^\delta \cup X^\varepsilon, W_\delta^\varepsilon)$ такой, что $|X^\varepsilon| = 2$.*

Доказательство. Обозначим через Z подмножество X_f^σ , состоящее из всех переменных x_i таких, что $|P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)| = 1$. Согласно лемме 10 имеем $|Z| > k^{\delta(f)-1}$.

Очевидно, что если $M \subseteq E_k^m$ и $|M| > k^{m-1}$, то существуют 2 набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m), (\beta_1, \dots, \beta_m) \in M$ такие, что $\alpha_i \neq \beta_i$ для любого $i \in N_m$.

Поскольку для каждой $x_i \in Z$ подфункция $g \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)$ получается подстановкой констант вместо переменных из X_f^δ , то условие $|Z| > k^{\delta(f)-1}$ оказывается достаточным для существования двух переменных x_l и x_m в Z со следующим свойством. Если подфункции $g_1 \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_l}, h)$ и $g_2 \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_m}, h)$ определяются подстановками в h вместо переменных из X_f^δ , соответственно, констант $\lambda_1, \dots, \lambda_{\delta(f)}$ и $\nu_1, \dots, \nu_{\delta(f)}$, то $\nu_i \neq \lambda_i$ для любого $i \in N_{\delta(f)}$.

Положим $X^\varepsilon = \{x_m, x_l\}$. Нетрудно видеть, что подграф $G_{h,\delta}^\varepsilon$ графа $G_{h,\delta}$, порожденный на множестве вершин $X_f^\delta \cup X^\varepsilon$, является искомым. \square

Лемма 13. *Если $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$ и $\sigma(f) = k^{\delta(f)} \geq k$, то для любой $x_i \in X_f^\sigma$ существует $x_j \in X_f^\sigma$ такая, что подграф графа $G_{h,\delta}$, порожденный на множестве вершин $X_f^\delta \cup \{x_i, x_j\}$, является δ -полным.*

Доказательство. Обозначим через Z подмножество X_f^σ , состоящее из всех переменных x_i таких, что $|P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)| = 1$. По лемме 10 имеем $|Z| = k^{\delta(f)} = \sigma(f)$, т. е. $Z = X_f^\sigma$.

Следовательно, для каждой переменной x_i из X_f^σ существует ровно одна подстановка в h вместо переменных из X_f^δ констант, которая дает единственную подфункцию из $P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)$.

Пусть $x_i \in X_f^\sigma$ и $g_1 \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, h)$ получается подстановкой в h вместо переменных из X_f^δ констант $\lambda_1, \dots, \lambda_{\delta(f)}$. Сделаем произвольную подстановку констант $\nu_1, \dots, \nu_{\delta(f)}$ вместо переменных

из X_f^δ в h такую, что $\nu_i \neq \lambda_i$ для любого $i \in N_{\delta(f)}$. Пусть эта подстановка определяет подфункцию $g_2 \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*(\{x_j\}, h)$. Понятно, что подграф графа $G_{h,\delta}$, порожденный на множестве вершин $X_f^\delta \cup \{x_i, x_j\}$, является δ -полным.

Лемма доказана. \square

Лемма 14. Пусть $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$, тогда:

- а) если $\sigma(f) > k^{\delta(f)-1} + 1$, то при $x_m \in X_f^\sigma$ можно выбрать такое множество X^ε , что $x_m \notin X^\varepsilon$ и $G_{h,\delta}^\varepsilon = (X_f^\delta \cup X^\varepsilon, W_\delta^\varepsilon)$ является δ -полным подграфом графа $G_{h,\delta}$;
- б) если $\sigma(f) = k^{\delta(f)-1} + 1$ и существует $x_m \in X_f^\sigma$, что $x_m \in X^\varepsilon$ для любых X^ε со свойством $|X^\varepsilon| \leq \delta(f) + 1$ и граф $G_{h,\delta}^\varepsilon = (X_f^\delta \cup X^\varepsilon, W_\delta^\varepsilon)$ является δ -полным подграфом графа $G_{h,\delta}$, то множество X^ε можно выбрать так, что $|X^\varepsilon| = 3$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma(f) \geq 2^{\delta(f)-1} + 1$ и существует $x_m \in X_f^\sigma$ такая, что для любого X^ε имеет место $x_m \in X^\varepsilon$. Последнее означает, что существуют переменная $x_i \in X_f^\delta$ и константа $\nu \in E_k$ такие, что в графе $G_{h,\delta}$ из вершины x_i исходит только одно ребро с пометкой ν и оно ведет в вершину x_m . Это означает, что подфункция h_ν^i существенно зависит от всех переменных из $X_f^\sigma \setminus \{x_m\}$. Следовательно, $k^{\delta(f)-1} \geq \sigma(f) - 1$. Поэтому если $\sigma(f) > k^{\delta(f)-1} + 1$, то выполняется пункт а) леммы.

Если $\sigma(f) = k^{\delta(f)-1} + 1$, то это означает, что для каждой переменной x_j из $X_f^\sigma \setminus \{x_m\}$ существует ровно одна подстановка констант в h_ν^i вместо переменных из $X_f^\sigma \setminus \{x_i\}$, которая дает единственную подфункцию, принадлежащую $P(X_f^\sigma, h) \cap P^*(\{x_j\}, h)$, откуда в соответствии с леммой 13 существуют x_j, x_l из $X_f^\sigma \setminus \{x_m\}$, что подграф графа $G_{h,\delta}$, порожденный на множестве вершин $X_f^\delta \cup \{x_m, x_j, x_l\}$, является δ -полным. \square

Предложение 3. Если $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$ и подграф $G_{h,\delta}^\varepsilon = (X_f^\delta \cup X^\varepsilon, W_\delta^\varepsilon)$ графа $G_{h,\delta}$ является δ -полным, то для любого множества неисправностей

$$C' = \{\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^k : \forall x_i \in X_f^{\tau-\delta} (\gamma_i = k), \exists x_m \in X_f^\delta (\gamma_m \neq k)\}$$

имеет место $I(X^\varepsilon, h) \in \mathcal{M}(f, C')$.

Доказательство. Пусть $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C'$ и $\gamma_m = \nu \neq k$, где $x_m \in X_f^\delta$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Из определения δ -полноты следует, что существует $x_l \in X^\varepsilon$ такая, что $(x_m, x_l)_\nu \in W_\delta^\varepsilon$. Рассмотрим наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из $I(X^\varepsilon, h)$ такие, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(l, f)$. Условие $(x_m, x_l)_\nu \in W_\delta^\varepsilon$ означает,

что h_γ^n зависит фиктивно от переменной x_l . Отсюда следует, что $f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha})) = f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta}))$. Получаем либо $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}))$, либо $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\beta}))$. Следовательно, $I(X^\varepsilon, h) \in \mathcal{M}(f, C')$. \square

Лемма 15. Для любой функции $f \in B_3^6$ такой, что $\sigma(f) \leq 3$, имеет место $L(f, C^3) \leq 8$.

Доказательство. Отметим следующие два утверждения, которые устанавливаются несложной проверкой возможных ситуаций:

- а) если $h \in B_3^4$, то $L(h, C^3) = 6$ тогда и только тогда, когда $\sigma(h) = 3$;
- б) если $f \in B_3^6$, $\sigma(f) \leq 3$ и у функции f есть подфункция h , существенно зависящая от 4-х переменных и такая, что $\sigma(h) = 3$, то множество $I(X_f^\sigma, h)$ можно выбрать так, что для некоторых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ будет выполнено $I(X_f^\sigma, h) \cup \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} \in \mathcal{M}(f, C^3)$.

Отсюда вытекает утверждение леммы. \square

1.3. Верхние оценки для $L(n, C^k)$

Здесь мы за величинами, введенными в предыдущем параграфе, сохраним те же обозначения.

Пусть $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_3$ — такие наборы из E_k^n , что $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \in R(i, f)$ и $(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) \in R(j, f)$. В этом случае пишем $D_{ij} = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3\}$. Если переменные x_i и x_j связные, то D_{ij} существует, так как существует подфункция, существенно зависящая от x_i и x_j . Допустим, множество $Y \subseteq X^n$ можно разбить на пары связных для f переменных. Тогда полагаем

$$V(Y, f) = \cup D_{ij},$$

где сумма берется по некоторому описанному разбиению.

Если $|Y|$ — нечетно, а у $Y \setminus \{x_i\}$ есть такое разбиение, то полагаем

$$V(Y, f) = V(Y \setminus \{x_i\}, f) \cup \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\},$$

где $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(i, f)$.

Как следует из лемм 6 и 8 для получения верхней оценки $L(n, C^k)$ (см. 1.1) достаточно рассмотреть функции $f \in B_k^n$, для которых имеет место

$$\delta(f) < t < \tau(f), \quad \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t,$$

и

$$\delta(f) - 1 < t < \tau(f), \quad \text{если } n = k^{t-1} + t.$$

Лемма 16. Если $f \in B_k^n$ и $\sigma(f) = 1$, то для любого $k \geq 2$ имеет место

$$L(f, C^k) \leq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t, \end{cases}$$

— сложность функции f относительно класса константных неисправностей C^k .

Доказательство. Условие $\sigma(f) = 1$ означает, что функция f имеет максимальный коэффициент связности, другими словами, любые две переменные из X^n связаны для f .

Рассмотрим множество $V(X^n, f)$. В нашем случае это множество определено и по предложению 2 имеет место $V(X^n, f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$. Получаем

$$L(f, C^k) \leq |V(X^n, f)| \leq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

где $\lfloor a \rfloor$ означает наибольшее целое число b , такое, что $b \leq a$.

Рассмотрим два случая.

1) $k \geq 3$. Если $n \leq 2$, то лемма 16 очевидна. Если $n \geq 3$, то по следствию функция f имеет подфункцию $g \in P^o(Y^3, f)$, где $Y^3 \subseteq X^n$, $|Y^3| = 3$. Нетрудно видеть, что для любой такой функции g существует множество $T(g) \in E_k^n(g)$ такое, что $T(g) \subseteq \mathcal{M}(g, C^k)$ и $|T(g)| \leq 4$.

Рассмотрим множество

$$T_2(f) = T(g) \cup V(X^n \setminus Y^3, f).$$

Очевидно, что $T_2(f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$. Следовательно,

$$L(f, C^k) \leq |T_2(f)| \leq 2n - 2 - \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

В случае, когда $n = k^{t-1} + t$, получаем

$$2n - 2 - \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \leq 2n - 2t + 1.$$

Если же $k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$, то неравенство

$$2n - 2 - \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \leq 2n - 2t$$

не выполнено только при значениях $n = 6$ и $k = 3$. Для этого частного случая лемма 16 вытекает из леммы 15.

2) $k = 2$. В случае $n \leq 4$ лемма 16 очевидна, поэтому далее полагаем $n \geq 5$. Тогда по следствию у функции $f \in B_2^n$ существует подфункция g , существенно зависящая от пяти переменных. Для нее есть тест

$T(g) \subseteq E_2^n(g)$ такой, что $|T(g)| \leq 6$. Пусть $g \in P^\circ(X_g^5, f)$, где $X_g^5 \subseteq X^n$ и $|X_g^5| = 5$. Очевидно, что для множества

$$T_2'(f) = T(g) \cup V(X^n \setminus X_g^5, f)$$

имеет место $T_2'(f) \in \mathcal{M}(f, C^2)$. Получаем

$$L(f, C^2) \leq |T_2'(f)| \leq 2n - 4 - \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor.$$

В случае $n = 2^{t-1} + t$ получаем

$$2n - 4 - \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \leq 2n - 2t + 1.$$

Если же $2^{t-1} + t < n \leq 2^t + t$, то неравенство

$$2n - 4 - \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \leq 2n - 2t$$

не выполнено только при $n = 8$. Рассмотрим этот случай отдельно.

Пусть $f \in B_2^8$. У функции f есть подфункция $g \in P^\circ(X_g^6, f)$, где $X_g^6 \subseteq X^8$ и $|X_g^6| = 6$. Возможны три случая:

а) $\sigma(g) = 1$. При этом условии в X_g^6 найдется переменная x_m такая, что $P^\circ((X^8 \setminus X_g^6) \cup \{x_m\}, f) \neq \emptyset$ и $P^\circ(X_g^6 \setminus \{x_m\}, f) \neq \emptyset$. Пусть g_1 берется из первого из этих непустых множеств, а g_2 — из второго. Функции g_1 и g_2 имеют такие тесты $T(g_1)$ и $T(g_2)$, что $|T(g_1)| \leq 4$, $|T(g_2)| \leq 6$ и $T(g_1) \cup T(g_2) \in \mathcal{M}(f, C^2)$. Следовательно,

$$L(f, C^2) \leq 10 = 2n - 2t.$$

б) $2 \leq \sigma(g) \leq 3$. В этом случае нетрудно показать, что функция g имеет тест $T(g)$ такой, что $|T(g)| \leq 7$. Легко видеть, что имеет место

$$T(g) \cup V(X^8 \setminus X_g^6, f) \in \mathcal{M}(f, C^2),$$

откуда получаем $L(f, C^2) \leq 10$.

в) $\sigma(g) = 4$. Имеем $\delta(g) = 2$. Из леммы 12 следует, что существуют переменные x_l и x_m из X_g^6 такие, что выполнено

$$I(\{x_l, x_m\}, g) \cup V(X^8 \setminus (\{x_l, x_m\} \cup X_g^\delta), f) \in \mathcal{M}(f, C^2),$$

откуда получаем $L(f, C^2) \leq 10 = 2n - 2t$. □

Лемма 17. Если $f \in B_k^n$ и $2 \leq \sigma(f) \leq k^{\delta(f)-1}$, то для любого $k \geq 2$ имеет место

$$L(f, C^k) \leq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$T_3(f) = I(X_f^\sigma, h) \cup V(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f) \cup I(X^\omega, f).$$

Из определения множества X^ω , приведенного в предыдущем параграфе, следует, что множество $V(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f)$, а, следовательно, и множество $T_3(f)$ определены. По предложению 2 и лемме 4 получаем $T_3(f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$. Следовательно,

$$L(f, C^k) \leq |T_3(f)| \leq |I(X_f^\sigma, h)| + |V(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f)| + |I(X^\omega, f)|,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} L(f, C^k) &\leq 2\sigma(f) + \frac{3}{2}((\tau(f) - \delta(f)) - \omega) + 2\omega = & (1.1) \\ &= 2n - 2\delta(f) - \frac{(\tau(f) - \delta(f)) - \omega}{2}, \end{aligned}$$

где $(\tau(f) - \delta(f)) - \omega$ есть четное число.

Рассмотрим два случая.

1) $k \geq 3$. Возможны два подслучая:

а) $k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$. Из $n \leq k^{\delta(f)-1} + \tau(f)$ и $n \geq k^{t-1} + t$ получаем

$$\tau(f) \geq (k^{t-1} - k^{\delta(f)-1}) + t.$$

Известно, что $\omega \leq \sigma(f) \leq k^{\delta(f)-1}$. После подстановки этих соотношений в правую часть (1.1) получаем

$$L(f, C^k) \leq (2n - 2\delta(f)) - \left\lceil \frac{(k^{t-1} - 2k^{\delta(f)-1}) + (t - \delta(f))}{2} \right\rceil,$$

где $\lceil a \rceil$ означает наименьшее число b , такое что $b \geq a$. Заметим, что при нечетном числителе имеем $\omega < k^{\delta(f)-1}$.

Пусть $L(f, C^k) > 2n - 2t$. Тогда получаем

$$\left\lceil \frac{(k^{t-1} - 2k^{\delta(f)-1}) + (t - \delta(f))}{2} \right\rceil < 2(t - \delta(f)). \quad (1.2)$$

Учитывая, что $2 \leq \delta(f) \leq t - 1$ и $k \geq 3$, легко убеждаемся, что неравенство (1.2) неразрешимо. Полученное противоречие доказывает, что для любой функции $f \in B_k^n$, удовлетворяющей данным условиям, имеет место

$$L(f, C^k) \leq 2n - 2t.$$

б) $n = k^{t-1} + t$. После подстановки соответствующих соотношений, учитывая, что $\delta(f) \leq t - 2$, получаем

$$(2n - 2\delta(f)) - \left\lceil \frac{(\tau(f) - \delta(f)) - \omega}{2} \right\rceil \leq (2n - 2t) + 1. \quad (1.3)$$

2) $k = 2$. В случае, когда $n \geq 2^{t-1} + t + 2$, полагая $L(f, C^k) > 2n - 2t$, убеждаемся, что неравенство (1.2) неразрешимо. Если $n = 2^{t-1} + t$, то неравенство (1.3) выполняется для всех допустимых числовых значений параметров $\delta(f)$, $\tau(f)$ и ω . Итак, остается рассмотреть случай $n = 2^{t-1} + t + 1$. Если в известных при этом соотношениях $n \leq 2^{\delta(f)-1} + \tau(f)$, $\omega \leq 2^{\delta(f)-1}$ и $\delta(f) \leq t - 1$ хотя бы одно неравенство выполнено строго, то для таких функций при допущении $L(f, C^2) > 2n - 2t$ получаем противоречивое неравенство (1.2). В противном случае получается $|X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega| = 2$ и $\omega = \sigma(f) = 2^{\delta(f)-1}$. По лемме 5 у функции f существует опорная четверка $\langle h_\circ, x_{l_\circ}, \nu_\circ, I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ) \rangle$. Возможны два случая.

а) $x_{l_\circ} \in X^\omega$. Тогда, взяв в качестве теста функции f множество

$$T_3'(f) = I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ) \cup V(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f) \cup I(X^\omega \setminus \{x_{l_\circ}\}, f) \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}\},$$

где $(\tilde{\alpha}_{l_\circ}, \tilde{\beta}_{l_\circ}) \in R(l_\circ, f)$, $\tilde{\alpha}_\circ \in I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ)$, получаем

$$|T_3'(f)| \leq 2n - 2t.$$

б) $x_{l_\circ} \in X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega$. Обозначим другую переменную из $X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega$ через x_m . Существует переменная $x_r \in X^\omega$ такая, что x_m и x_r связаны для f , иначе $X^\omega \cup \{x_m\}$ было бы несвязным множеством функции f большей мощности, чем X_f^σ . Рассмотрим множество

$$T_3'' = I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ) \cup V(\{x_m, x_r\}, f) \cup I(X^\omega \setminus \{x_r\}, f) \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}\}.$$

Очевидно, что $T_3''(f) \in \mathcal{M}(f, C^2)$ и $L(f, C^2) \leq |T_3''(f)| \leq 2n - 2t$. \square

Лемма 18. Если $f \in B_k^n$ и $k^{\delta(f)-1} < \sigma(f) \leq \frac{1}{2}(k^{\delta(f)} + k^{\delta(f)-1})$, то для любого $k \geq 2$ имеет место

$$L(f, C^k) \leq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) $\delta(f) \leq t - 2$. Возьмем тест $T_3(f)$. После подстановки в правую часть соотношения (1.2) соответствующих ограничений на $\tau(f)$, $\delta(f)$ и ω легко убеждаемся, что при $k \geq 3$ тест $T_3(f)$ является искомым. Если $k = 2$, то тест $T_3(f)$ — искомым при ограничении $\delta(f) \geq 3$. Заметим, что в нашем случае имеет место $\delta(f) \geq 2$, поскольку рассматривается случай $\sigma(f) \geq 2$.

Итак, $\delta(f) = 2$, $k = 2$. Если $n = 2^{t-1} + t$, то неравенство (1.3) не выполняется только в случае $n = 12$ и $\omega = 3$. Если $2^{t-1} + t < n \leq 2^t + t$, то наша цель не достигается в случаях $n = 13$ и $\omega = 2$, а также если $n = 14$ и $\omega = 3$.

В случаях $n = 12$ и $n = 14$ нетрудно видеть, что множество X^ω можно выбрать так, чтобы выполнялось $x_{l_o} \in X^\omega$, где x_{l_o} , как и прежде, переменная, определяемая множеством $I^\circ(X_f^\sigma, h_o)$. Тогда получаем, что множество $T'_3(f)$ будет искомым тестом функции f .

Пусть $n = 13$, $\omega = 2$ и $x_{l_o} \in X^\omega$. Тогда существуют связные для f переменные x_m и x_r , соответственно, из множеств X^ω и X_f^σ , для которых $\tilde{\alpha}_r \neq \tilde{\alpha}_{l_o} \neq \tilde{\beta}_r$, если $\tilde{\alpha}_r$ и $\tilde{\beta}_r$ такие наборы из $I^\circ(X_f^\sigma, h_o)$, что $(\tilde{\alpha}_r, \tilde{\beta}_r) \in R(r, f)$, где $\tilde{\alpha}_{l_o} \in I^\circ(X_f^\sigma, h_o)$ и $(\tilde{\alpha}_{l_o}, \tilde{\beta}_{l_o}) \in R(l_o, f)$. Так как x_m и x_r связны, то в E_2^n существуют наборы $\tilde{\alpha}_m$ и $\tilde{\beta}_m$ такие, что $(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m) \in R(m, f)$ и $\tilde{\alpha}_m \in R_\lambda(r, f)$ для некоторого $\lambda \in E_2$. Пусть $\tilde{\alpha}_r \in R_\lambda(r, f)$. Нетрудно видеть, что множество $I^\circ(X_f^\sigma, h_o)$, а, точнее, существенное r -ребро $(\tilde{\alpha}_r, \tilde{\beta}_r)$, можно выбрать так, что следующее множество

$$T_3^*(f) = (I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \setminus \{\tilde{\alpha}_r\}) \cup \{\tilde{\beta}_{l_o}, \tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m\} \cup \\ \cup V(X_f^{\tau-\delta} \setminus (X^\omega \cup \{x_{l_o}\}), f) \cup I(X^\omega \setminus \{x_m\}, f)$$

— искомый тест функции f для класса C^2 . Легко убедиться, что

$$|T_3^*(f)| \leq 20 = 2n - 2t.$$

2) $\delta(f) = t - 1$. Можно считать, что $k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$, ибо при $n = k^{t-1} + t$ по лемме 6 имеем $L(f, C^k) \leq (2n - 2t) + 1$.

Рассмотрим два подслучая а) и б).

а) $k \geq 3$. Возьмем тест $T_3(f)$. Из условия $\delta(f) = t - 1$ следует, что нам нужно показать, что

$$\frac{(\tau(f) - \delta(f)) - \omega}{2} \geq 2,$$

где ω может принимать такое значение, при котором $(\tau(f) - \delta(f)) - \omega$ есть неотрицательное четное число. Пусть $(\tau(f) - \delta(f)) - \omega \leq 2$.

i) $\sigma(f) = k^{\delta(f)-1} + 1$. Тогда имеем $\delta(f) = 1$. Следовательно, $\sigma(f) = 2$. Получаем $\tau(f) \leq 5$. При $\tau(f) = 5$ и $\omega = 2$ мы можем выбрать множество X^ω так, чтобы выполнялось $x_{l_o} \in X^\omega$. Отсюда следует, что можно воспользоваться тестом $T'_3(f)$, для которого в нашем случае получаем $|T'_3(f)| \leq 2n - 2t$.

Остается рассмотреть случай $\tau(f) = 4$, $n = 6$, $k = 3$, $\delta(f) = 1$, $\sigma(f) = 2$, $\omega = 2$, который разрешается с помощью леммы 15.

ii) $\sigma(f) \geq k^{\delta(f)-1} + 2$. После применения в соответствующих случаях тестов $T'_3(f)$ и $T''_3(f)$ легко убеждаемся, что остается открытым только случай $n = 6$, $k = 3$, $\tau(f) = 3$, $\delta(f) = 1$, $\sigma(f) = 3$. Этот случай не удовлетворяет ограничению $\sigma(f) \leq \frac{1}{2}(k^{\delta(f)} + k^{\delta(f)-1})$, однако он разрешен благодаря лемме 15.

Итак, из i) и ii) видно, что в случае $k \geq 3$ и $\delta(f) = t - 1$ предложение 4 доказано при более широком ограничении: $k^{\delta(f)-1} + 1 \leq \sigma(f) \leq k^{\delta(f)}$.

б) $k = 2$. Из предложения 3 леммы 11 следует, что у множества X_f^σ существует такое подмножество X^ε , что $|X^\varepsilon| \leq \delta(f) + 1$ и выполнено $I(X^\varepsilon, h) \in \mathcal{M}(f, F')$, где

$$F' = \{\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^2 : \forall x_i \in X_f^{\tau-\delta}(\gamma_i = 2), \exists x_m \in X_f^\delta(\gamma_m \neq 2)\},$$

$\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Если $|X^\omega| > |X^\varepsilon|$, то множество $V(X_\sigma^{\omega-\varepsilon} \cup X_\omega^{\omega-\varepsilon}, f)$ определено, где $|X_\sigma^{\omega-\varepsilon}| = |X_\omega^{\omega-\varepsilon}| \geq |X^\omega| - |X^\varepsilon|$, $X_\sigma^{\omega-\varepsilon} \subseteq X_f^\sigma \setminus X^\varepsilon$, $X_\omega^{\omega-\varepsilon} \subseteq X^\omega$, и, согласно лемме 9, множества $X_\sigma^{\omega-\varepsilon}$ и $X_\omega^{\omega-\varepsilon}$ в соответствующем графе находятся в паросочетании. Рассмотрим множество

$$\begin{aligned} T_4(f) &= I(X_f^\sigma \setminus X_\sigma^{\omega-\varepsilon}, h) \cup V(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f) \cup \\ &\cup I(X^\omega \setminus X_\omega^{\omega-\varepsilon}, f) \cup V(X_\sigma^{\omega-\varepsilon} \cup X_\omega^{\omega-\varepsilon}, f). \end{aligned}$$

По предложениям 2 и 3 имеем $T_4(f) \in \mathcal{M}(f, C^2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} L(f, C^2) &\leq |T_4(f)| \leq \\ &\leq 2n - 2\delta(f) - \left(\frac{\tau(f) - \delta(f) - \omega}{2} + \max\{\omega - (\delta(f) + 1), 0\} \right). \end{aligned}$$

Из условия $\delta(f) = t - 1$ следует, что требуется установить

$$\frac{(\tau(f) - \delta(f)) - \omega}{2} + \max\{\omega - (\delta(f) + 1), 0\} \geq 2. \quad (1.4)$$

Легко видеть, что при условии $\delta(f) \geq 5$ неравенство (1.4) выполняется для любых числовых значений участвующих в нем параметров. С другой стороны, в рассматриваемом случае имеем $\delta(f) \geq 2$. В случае $2 \leq \delta(f) \leq 4$ воспользуемся леммой 14.

Рассмотрим три подслучая.

i) $\delta(f) = 4$. Пусть $x_{l_\circ} \in X_f^{\tau-\delta}$ — переменная, определяющаяся множеством $I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ)$. В множестве $X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_\circ}\}$ есть переменная x_r , которая связана с некоторой переменной $x_m \in X_f^\sigma$ такой, что множество $I^\circ(X_f^\sigma \setminus \{x_m\}, h_\circ) = I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ) \setminus \{\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m\}$ содержит набор $\tilde{\alpha}_{l_\circ}$, где $\tilde{\alpha}_m, \beta_m \in I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ)$, $(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m) \in R(m, f)$ и $(\tilde{\alpha}_{l_\circ}, \tilde{\beta}_{l_\circ}) \in R(l_\circ, f)$. Если множество X^ε можно выбрать так, что $x_m \notin X^\varepsilon$, то легко видеть, что следующее множество

$$I^\circ(X_f^\sigma \setminus \{x_m\}, h_\circ) \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}\} \cup V(\{x_r, x_m\}, f) \cup I(X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_\circ}, x_r\}, f)$$

является тестом нужной длины функции f .

В другом случае, т. е. если выполнено условие б) леммы 14, пользуясь тестом $T_4(f)$ и утверждением этой леммы, получаем

$$\frac{(\tau(f) - \delta(f)) - \omega}{2} + \max\{(\omega - 3), 0\} \geq 2, \quad (1.5)$$

что в нашем случае верно для всех числовых значений.

ii) $\delta(f) = 3$. Проводя те же рассуждения, что в пункте i), убеждаемся, что неравенство (1.5) не выполнено только при $n = 13$ и $\omega = 3$. В этом случае множество X^ε можно выбрать так, что найдется пара связанных переменных x_r и x_m соответственно из множеств $X_f^\sigma \setminus X^\varepsilon$ и X^ω . Очевидно, что множество

$$I(X_f^\sigma \setminus \{x_r\}, h) \cup V((X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega) \cup \{x_r, x_m\}, f) \cup I(X^\omega \setminus \{x_m\}, f)$$

является искомым тестом.

iii) $\delta(f) = 2$. Если множество $I^\circ(X_f^\sigma, h_o)$ можно выбрать так, что в $I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \cup \{\tilde{\beta}_{l_o}\}$ содержится набор $\tilde{\alpha}_r$ такой, что $(\tilde{\alpha}_r, \tilde{\beta}_r) \in R(r, f)$, $x_r \in X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_o}\}$, то ясно, что множество

$$I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \cup \{\tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_{l_o}\} \cup I(X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_o}, x_r\}, f)$$

является искомым тестом. В противном случае, нетрудно видеть, что в множестве $X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_o}\}$ есть пара связанных переменных x_s и x_m . Очевидно, что в этом случае искомым тестом функции f будет следующее множество:

$$I^\circ(X_f^\sigma, h_o) \cup \{\tilde{\beta}_{l_o}\} \cup V(\{x_s, x_m\}, f) \cup I(X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_s, x_m, x_{l_o}\}, f). \quad \square$$

Лемма 19. Если $f \in B_k^n$ и $\frac{1}{2}(k^{\delta(f)} + k^{\delta(f)-1}) < \sigma(f) \leq k^{\delta(f)}$, то для любого $k \geq 2$ имеет место

$$L(f, C^k) \leq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим тест $T_4(f)$. Из леммы 12 и предложения 3 получаем

$$|T_4(f)| \leq 2n - 2\delta(f) - \left(\frac{(\tau(f) - \delta(f)) - \omega}{2} + \max\{(\omega - 2), 0\} \right).$$

При учете соответствующих ограничений и простейших преобразований легко убеждаемся, что при $k \geq 3$ тест $T_4(f)$ является искомым. В случае, если $k = 2$, рассмотрим две возможности.

1) $\delta(f) \leq t - 2$. Если при этом $\delta(f) \geq 3$, то легко получаем требуемое неравенство.

Случай $\delta(f) \leq 2$ разобьем на два подслучая.

а) $\delta(f) = 2$. Тогда из $2^{\delta(f)} \geq \sigma(f) > 3 \times 2^{\delta(f)-2}$ получаем $\sigma(f) = 4 = 2^{\delta(f)}$. Из леммы 13 следует, что множество X^ε можно выбрать так, что если $1 \leq \omega \leq 2$, то $|X_\sigma^{\omega-\varepsilon}| = |X_\omega^{\omega-\varepsilon}| \geq 1$, а если $\omega \geq 2$, то $|X_\sigma^{\omega-\varepsilon}| = |X_\omega^{\omega-\varepsilon}| = 2$. Очевидно, что тест $T_4(f)$ с учетом такого X^ε удовлетворяет необходимому ограничению на длину.

б) $\delta(f) = 1$. В этом случае имеем $\sigma(f) = 2$ и предложение 4 остается недоказанным для значений $7 \leq n \leq 16$. Нетрудно видеть, что существует подмножество переменных $Y^3 \subseteq X_f^{\tau-\delta}$ такое, что $|Y^3| = 3$, $P^\circ(X_f^{\sigma+\delta} \cup Y^3, f) \neq \emptyset$ и множество $V(X_f^{\tau-\delta} \setminus Y^3, f)$ определено, т.е. если $|X_f^{\tau-\delta} \setminus Y^3|$ четно, то это множество разбивается на пары связанных для f переменных, а если нечетно, то для некоторого $x_r \in X_f^{\tau-\delta} \setminus Y^3$ множество $(X_f^{\tau-\delta} \setminus Y^3) \setminus \{x_r\}$ обладает тем же свойством. Пусть $g \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta} \cup Y^3, f)$. Вернемся к подслучаям б) и в) случая 2) леммы 16. Аналогичные рассуждения легко позволяют найти нужный тест функции f .

2) $\delta(f) = t - 1$. В случае $\delta(f) = 1$ имеем $n \leq 6$, и тест $T_2(f)$ из леммы 16 является искомым. Случай $n = 2^{t-1} + t$ уже рассмотрен. В случае $n \geq 2^{t-1} + t + 3$ и $\delta(f) \geq 2$, пользуясь леммами 12 и 13 и тестом $T_4(f)$, получаем требуемое ограничение на длину теста. Следовательно, остается рассмотреть два случая а) и б).

а) $n = 2^{t-1} + t + 2$. Рассмотрим множество $I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ)$. Если $X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_\circ}\}$ является несвязным множеством для функции f , то множество X^ε можно выбрать так, что в $X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_\circ}\}$ найдется переменная x_r , связанная с некоторой переменной x_m из множества $X_f^\sigma \setminus (X^\varepsilon \cup \{x_s\})$, где x_s определяется так: $\tilde{\alpha}_{l_\circ} \in I(X_f^\sigma, h_\circ)$, $(\tilde{\alpha}_{l_\circ}, \tilde{\beta}_{l_\circ}) \in R(l_\circ, f)$ и $\tilde{\alpha}_{l_\circ} \in R_\lambda(s, f)$ для некоторого $\lambda \in E_2$. Тогда множество

$$I^\circ(X_f^\sigma \setminus \{x_m\}, h_\circ) \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}\} \cup V(\{x_r, x_m\}, f) \cup I(X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_r, x_{l_\circ}\}, f)$$

является искомым тестом. Если же переменные x_i и x_j из $X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_\circ}\}$ связны для f , то в качестве теста функции возьмем множество

$$I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ) \cup V(\{x_i, x_j\}, f) \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}\} \cup I(X_f^{\tau-\delta} \setminus \{x_{l_\circ}, x_i, x_j\}, f).$$

б) $n = 2^{t-1} + t + 1$. Если при этом $\sigma(f) = 2^{\delta(f)}$, то множество $I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ)$ можно выбрать так, что множество $I^\circ(X_f^\sigma, h_\circ) \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}\}$ содержит набор $\tilde{\alpha}_m$, где $(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m \in R(m, f)$ и $X_f^{\tau-\delta} = \{x_{l_\circ}, x_m\}$. Тогда множество $I^\circ(X_f^\sigma \cup \{\tilde{\beta}_{l_\circ}, \tilde{\beta}_m\})$ будет тестом функции f нужной длины. Если же $3 \cdot 2^{\delta(f)-2} < \sigma(f) < 2^{\delta(f)}$, имеем $\delta(f) \geq 3$. В этом случае существует не менее двух непересекающихся множеств типа X^ε , причем такие, что $|X^\varepsilon| = 2$. Тогда, рассуждая так же, как в предыдущем пункте а), мы находим искомым тест функции f для класса неисправностей C^2 . \square

Предложение 4. Для любых $n \geq 1$ и $k \geq 2$ имеет место

$$L(n, C^k) \leq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно леммам 16–19 для произвольной функции $f \in P_k^n$ имеет место

$$L(f, C^k) \leq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t, \end{cases}$$

откуда следует предложение 4. \square

Замечание. Анализ доказательства предложения 4 убеждает, что основная сложность, а именно, рассмотрение большого количества случаев, возникает в следующих пределах значений: $k \leq 3$ и $6 \leq n \leq 16$. В этих случаях верхняя оценка длины теста, которая легко получается на основании общих закономерностей, доказанных в параграфе 1.2, как правило, на единицу превосходит требуемую величину. Поэтому каждый раз приходится существенно использовать особенности рассматриваемого случая.

1.4. Нижние оценки для $L(n, C^k)$

Докажем следующее утверждение.

Предложение 5. Для любых $n \geq 1$ и $k \geq 2$ имеет место

$$L(n, C^k) \geq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что для доказательства достаточно привести пример такой функции $f \in B_k^n$, для которой имеет место

$$L(f, C^k) \geq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Пусть $j_\alpha(x)$ — характеристическая функция значения $\alpha \in E_k$, т. е. $j_\alpha(x) = 1$ при $x = \alpha$ и $j_\alpha(x) = 0$, если $x \neq \alpha$.

Положим

$$f_c(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=t+1}^n x_i \& j_{\alpha_1^i}(x_1) \& \dots \& j_{\alpha_i^i}(x_t), \quad (1.6)$$

где t определяется из $k^{t-1} + t \leq n \leq k^t + t$; для каждого $i \geq t + 1$ набор значений $\alpha_1^i, \dots, \alpha_t^i$ однозначно определяется из $\alpha_1^i + k\alpha_2^i + \dots + k^{t-1}\alpha_t^i = i - (t + 1)$; \bigvee и $\&$ есть, соответственно, функции \max и \min . Функция $f_c(x_1, \dots, x_n)$ является мультиплексором: она в зависимости от значений первых t переменных принимает значение одной из последующих переменных.

Нетрудно видеть, что для любых $i \geq t + 1, j \geq t + 1, i \neq j, \nu \in E_k$ и $\lambda \in E_k$ имеет место

$$R_\nu(i, f_c) \cap R_\lambda(j, f_c) = \emptyset.$$

Из последнего, учитывая необходимое условие, сформулированное в предложении 1, получаем, что для любого теста $T \in \mathcal{M}(f_c, C^k)$ имеет место $|T| \geq 2(n - t)$. Следовательно,

$$L(f_c, C^k) \geq 2n - 2t.$$

В случае, когда $n = k^{t-1} + t$ для любых $i \geq t + 1, \nu \in E_k$ и $\lambda \in E_k \setminus \{0\}$ имеет место

$$R_\nu(i, f_c) \cap R_\lambda(t, f_c) = \emptyset.$$

Отсюда следует, что

$$L(f_c, C^k) \geq 2n - 2t + 1.$$

Утверждение доказано. \square

Предложения 4 и 5 доказывают основную теорему настоящей главы.

Теорема 1. Для любых $n \geq 1$ и $k \geq 2$ имеет место

$$L(n, C^k) = \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

1.5. Подклассы из C^k

Теорема 2. Для любых $n \geq 1, k \geq 2$ и $p \in N_n$ имеет место

$$L(n, C^k(p)) = L(n, C^k).$$

Доказательство. Для множества $C^k(p)$ всех неисправностей из C^k , имеющих кратность не более, чем p , при любых p_1 и p_2 из N_n таких, что $p_1 \leq p_2$, имеет место

$$C^k(p_1) \subseteq C^k(p_2).$$

Значит, для $T \in \mathcal{M}(f, C^k(p_2))$ выполнено $T \in \mathcal{M}(f, C^k(p_1))$. Отсюда для любой функции $f \in P_k^n$ имеем

$$L(f, C^k(p_1)) \leq L(f, C^k(p_2)),$$

а потому

$$L(n, C^k(p_1)) \leq L(n, C^k(p_2)). \quad (1.7)$$

Рассмотрим функцию $f_c(x_1, \dots, x_n)$, задаваемую соотношением (1.6). Пользуясь предложением 1 и рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 5, мы легко убеждаемся, что имеет место

$$L(f_c, C^k(1)) \geq \begin{cases} 2n - 2t, & \text{если } k^{t-1} + t < n \leq k^t + t, \\ 2n - 2t + 1, & \text{если } n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Следовательно, $L(n, C^k(1)) \geq L(n, C^k)$. Последнее соотношение и неравенство (1.7) доказывают, что для любого $p \in N_n$ имеет место

$$L(n, C^k(p)) = L(n, C^k).$$

□

Теорема 3. Для любых $n \geq 1$, $k \geq 2$ и $\mu \in E_k$ имеет место

$$L(n, C_\mu^k) = n.$$

Доказательство. Покажем, что для любых f из B_k^n и $\mu \in E_k$ имеет место $L(f, C_\mu^k) \leq n$. Рассмотрим множество $T(f) = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n\}$, где каждый набор $\tilde{\alpha}_i$ выбирается из E_k^n так:

- 1) если $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, то имеет место $\alpha_i^i \neq \mu$, а также для α_i и набора $\tilde{\beta}_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{i-1}^i, \mu, \alpha_{i+1}^i, \dots, \alpha_n^i)$ выполнено $f(\tilde{\alpha}_i) \neq f(\tilde{\beta}_i)$.
- 2) не существует набора $\tilde{\alpha}'_i \in E_k^n$ такого, что $\tilde{\alpha}'_i$ удовлетворяет условию 1) и число координат набора $\tilde{\alpha}'_i$, равных μ , больше, чем таких координат в наборе $\tilde{\alpha}_i$.

Докажем, что для множества $T(f)$ имеет место $T(f) \in \mathcal{M}(f, C_\mu^k)$.

Пусть $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C_\mu^k$, где $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Возможны два случая.

а) $\gamma_r = \mu$ и $\gamma_i = k$ для всех $i \in N_n \setminus \{r\}$. Тогда для набора $\tilde{\alpha}_r \in T(f)$ по условию 1) имеем $f(\tilde{\alpha}_r) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}_r))$.

б) $\gamma_i = \mu$ для $i \in N' \subseteq N_n$ и $\gamma_j = k$ для $j \in N_n \setminus N'$. Рассмотрим множество $\{\tilde{\alpha}_i \in T(f) : i \in N'\}$; выберем из него набор $\tilde{\alpha}_r$, содержащий наибольшее количество координат, равных μ . Для $\tilde{\alpha}_r$ имеет место $f(\tilde{\alpha}_r) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}_r))$. Предположим, что это не так. Для двух наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из E_k^n будем писать $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}(\mu \rightarrow l)$, если $\beta_i = \alpha_i$ для всех $i \in N_n \setminus \{l\}$ и $\beta_l = \mu$. Пусть $\alpha_{j_1}^r, \dots, \alpha_{j_p}^r$ суть все те координаты набора $\tilde{\alpha}_r$, которые не равны μ , причем $\{j_1, \dots, j_p\} \subseteq N'$.

Можем полагать, что $r = j_1$. Рассмотрим последовательность $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_p$, где $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_r(\mu \rightarrow r)$, $\tilde{\beta}_2 = \beta_1(\mu \rightarrow j_2), \dots, \tilde{\beta}_p = \beta_{p-1}(\mu \rightarrow j_p)$.

Нетрудно видеть, что $\tilde{\beta}_p = \varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}_r)$. Так как $f(\tilde{\alpha}_r) \neq f(\beta_1)$ и $f(\tilde{\alpha}_r) = f(\tilde{\beta}_p)$, то имеем $f(\tilde{\beta}_1) \neq f(\tilde{\beta}_p)$. Из последнего следует, что существует номер $m \in N_{p-1}$ такой, что $f(\tilde{\beta}_m) \neq f(\tilde{\beta}_{m+1})$. Это означает, что $\tilde{\beta}_m$ удовлетворяет условию 1) выбора j_{m+1} -го набора в множестве $T(f)$. Следовательно, по условию 2) у набора $\tilde{\alpha}_{j_{m+1}}$ из $\{\tilde{\alpha}_i \in T(f) : i \in N'\}$ имеется не меньше координат, равных μ , чем у $\tilde{\beta}_m$. Так как описанных координат у $\tilde{\beta}_m$ строго больше, чем у $\tilde{\alpha}_r$, то и $\tilde{\alpha}_{j_{m+1}}$ имеет больше координат, равных μ , чем $\tilde{\alpha}_r$. Это противоречит условию выбора $\tilde{\alpha}_r$.

Итак, для любой неисправности $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C_{\mu}^k$ мы доказали, что существует $\tilde{\alpha}_r \in T(f)$, что $f(\tilde{\alpha}_r) \neq f(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}_r))$. Значит, $T(f) \in \mathcal{M}(f, C_{\mu}^k)$. Так как $|T(f)| = n$, то $L(f, C_{\mu}^k) \leq n$. Поскольку f — любая из B_k^n , то $L(n, C_{\mu}^k) \leq n$.

Для завершения доказательства приведем пример функции $f \in P_k^n$ такой, что $L(f, C_{\mu}^k) = n$.

Положим

$$f_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = j_{\mu}(x_1) \& \dots \& j_{\mu}(x_n).$$

Пусть $T \in \mathcal{M}(f_{\mu}, C_{\mu}^k)$ и $|T| < n$. Тогда найдется номер $m \in N_n$, для которого в T не существует набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такого, что $\alpha_i \neq \mu$ при $i = m$ и $\alpha_i = \mu$ для всех $i \in N_n \setminus \{m\}$. В противном случае, имело бы место $|T| \geq n$.

Рассмотрим неисправность $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C_{\mu}^k$ такую, что $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_m = \mu$ и $\gamma_i = k$ для всех $i \in N_n \setminus \{m\}$. Нетрудно видеть, что для любого набора $\tilde{\alpha} \in T$ имеет место $f_{\mu}(\tilde{\alpha}) = f_{\mu}(\varphi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\alpha}))$, т. е. $T \notin \mathcal{M}(f_{\mu}, C_{\mu}^k)$.

Полученное противоречие доказывает, что для любого теста $T \in \mathcal{M}(f_{\mu}, C_{\mu}^k)$ имеет место $|T| \geq n$. Следовательно, $L(f_{\mu}, C_{\mu}^k) \geq n$. Отсюда с учетом $L(n, C_{\mu}^k) \leq n$ получаем справедливость утверждения теоремы. \square

Теперь рассмотрим случай, когда константы в неисправностях могут принимать по крайней мере два значения.

Теорема 4. Для любых $n \geq 1$, $k \geq 2$ и $M \subseteq E_k$ такого, что $|M| \geq 2$, имеет место

$$L(n, C_M^k) = L(n, C^k).$$

Доказательство. Очевидно, что для любого подмножества $M \subseteq E_k$ имеет место

$$L(n, C_M^k) \leq L(n, C^k).$$

Пусть $\nu \in M$ и $k^{t-1} + t < n \leq k^t + t$. Рассмотрим следующую функцию:

$$f_M^n(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=t+1}^n j_\nu(x_i) \& j_{\alpha_1^i}(x_1) \& \dots \& j_{\alpha_i^i}(x_t),$$

где $\alpha_1^i + k\alpha_2^i + \dots + k^{t-1}\alpha_t^i = i - (t + 1)$.

Нетрудно видеть, что для любых $i > t, j > t, i \neq j, \nu_1 \in M$ и $\nu_2 \in M$ имеет место

$$R_{\nu_1}(i, f_M^n) \cap R_{\nu_2}(j, f_M^n) = \emptyset. \quad (1.8)$$

Положим

$$C_M^k(1)|_r = \{\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C_M^k : \forall i \in N_n \setminus \{r\} (\gamma_i = k)\}.$$

Это класс неисправностей, который подставляет на r -е место константу из M . Легко убедиться, что для любого $i > t$ не существует набора $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ такого, что $\{\tilde{\alpha}\} \in \mathcal{M}(f_M^n, C_M^k(1)|_i)$. Отсюда и из соотношения (1.8) следует, что для любого теста $T \in \mathcal{M}(f_M^n, C_M^k)$ должно выполняться $|T| \geq 2(n - t)$. Следовательно, имеет место

$$L(f_M^n, C_M^k) \geq 2n - 2t.$$

Доопределим функцию f_M^n для случая $n = k^{t-1} + t$, полагая

$$f_M^n(x_1, \dots, x_n) = j_\nu(x_n) \& f_M^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Значит, для любого теста $T \in \mathcal{M}(f_M^n, C_M^k)$ имеет место

$$|T| \geq 2((n - 1) - (t - 1)) + 1 = (2n - 2t) + 1.$$

Теорема доказана. □

НЕИСПРАВНОСТИ ТИПА СЛИПАНИЯ

2.1. Результаты

Класс слипаний S^k состоит из всевозможных неисправностей φ , определяемых следующим образом. С каждой неисправностью $\varphi \in S^k$ однозначно связано разбиение $D(\varphi)$ множества переменных X^n на непересекающиеся непустые подмножества $Z_1(\varphi), \dots, Z_{q_\varphi}(\varphi)$, $q_\varphi \in N_{n-1}$. При этом для любого $\tilde{\alpha} \in E_k^n$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, по определению полагаем $\varphi(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где для каждого $i \in N_n$ $\beta_i = \max\{\alpha_j : x_j \in Z_l(\varphi)\}$, если $x_i \in Z_l(\varphi)$, $l \in N_{q_\varphi}$.

Кратностью неисправности $\varphi \in S^k$ назовем величину $p(\varphi) = n - q_\varphi$, где q_φ — количество подмножеств множества X^n в разбиении $D(\varphi)$.

Пусть $S^k(p)$ множество всех неисправностей из S^k , имеющих кратность не более, чем p .

Основными результатами настоящей главы являются следующие теоремы.

Теорема 5. *Для любых $n \geq 2$ и $k \geq 2$ имеет место*

$$L(n, S^k) = n - 1$$

— функция Шеннона тестовой сложности для класса функций, зависящих от n переменных, относительно класса слипаний S^k .

Теорема 6. *Для любых $n \geq 2$, $k \geq 2$ и $p \in N_{n-1}$ имеет место*

$$L(n, S^k(p)) = L(n, S^k)$$

— функция Шеннона тестовой сложности для класса функций, зависящих от n переменных, относительно класса слипаний S^k , имеющих кратность не более, чем p .

2.2. Верхние оценки для $L(n, S^k)$

Введем несколько обозначений. Для наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ будем писать $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, если для любого $i \in N_n$ выполнено $\alpha_i \leq \beta_i$, и $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, если $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ и $\alpha_j < \beta_j$ для некоторого $j \in N_n$.

Пусть $\tilde{\alpha} \in E_k^n$. Положим $\Delta(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta} : \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}\}$. Обозначим через $D(\tilde{\alpha})$ такое разбиение множества X^n на непустые подмножества $Z_1(\tilde{\alpha}), \dots, Z_{q_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{\alpha})$, что для любых i и j из N_n , $i \neq j$, выполнено $\alpha_i = \alpha_j$ тогда и только тогда, когда $x_i, x_j \in Z_l(\tilde{\alpha})$ для некоторого l .

Для двух разбиений D' и D'' множества X^n обозначим через $D' \wedge D''$ разбиение, состоящее из всевозможных непустых пересечений множеств из D' и D'' .

Пусть $Z \subseteq X^n$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Будем писать $\tilde{\alpha} \preceq^Z \tilde{\beta}$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ для $x_i \in Z$ и $\alpha_i = \beta_i$ для $x_i \in X^n \setminus Z$.

Положим $\Delta(\tilde{\alpha}, Z) = \{\tilde{\beta} \in E_k^n : \tilde{\alpha} \preceq^Z \tilde{\beta}\}$.

Через φ_Z обозначим неисправность из S^k , определяющуюся следующими соотношениями: $Z \in D(\varphi_Z)$ и $p(\varphi_Z) = |Z| - 1$, т.е. все элементы разбиения $D(\varphi_Z)$, отличные от Z , являются одноэлементными подмножествами, и, тем самым, слипаются все переменные из Z и только они.

Пусть $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ и $\emptyset \neq Z \subseteq X^n$. Положим $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z) = \{\tilde{\beta} \in \Delta(\tilde{\alpha}, Z) : \tilde{\beta} \preceq \varphi_Z(\tilde{\alpha})\}$, т.е. это — множество наборов между $\tilde{\alpha}$ и $\varphi_Z(\tilde{\alpha})$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_k^n$. Опишем алгоритм построения множества $T(f)$, для которого затем докажем, что имеет место $|T(f)| \leq n - 1$ и $T(f) \in \mathcal{M}(f, S^k)$.

1-й шаг. Выберем набор $\tilde{\alpha} \in E_k^n$, обладающий следующими свойствами:

- существует набор $\tilde{\beta} \in \Delta(\tilde{\alpha})$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$;
- не существует набора $\tilde{\alpha}' \in \Delta(\tilde{\alpha})$, $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\alpha}'$, обладающего свойством а).

Если искомого набора нет, то полагаем $T(f) = \emptyset$, в противном случае зафиксируем один из таких наборов и обозначим его через $\tilde{\gamma}_1$. Положим $D_1 = D(\tilde{\gamma}_1)$.

i-й шаг. Фиксируем набор $\tilde{\gamma}_i$, обладающий свойствами:

- $D_{i-1} \wedge D(\tilde{\gamma}_i) \neq D_{i-1}$, причем для некоторого множества Z такого, что $Z \in D_{i-1}$ и $Z \notin D_{i-1} \wedge D(\tilde{\gamma}_i)$, существует набор $\tilde{\beta} \in \Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, Z)$, для которого имеет место $f(\tilde{\gamma}_i) \neq f(\tilde{\beta})$;
- не существует набора $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_i \prec \tilde{\alpha}$, обладающего свойством а).

Положим $D_i = D_{i-1} \wedge D(\tilde{\gamma}_i)$.

Работа алгоритма останавливается за конечное число m шагов и определяет множество $T(f) = \{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m\}$.

Лемма 20. *Имеет место $|T(f)| \leq n - 1$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что на i -м шаге алгоритма мы получаем разбиение D_i множества X^n минимум на $i + 1$ непересекающееся подмножество и, поскольку заключительное разбиение D_m может содержать максимум n подмножеств множества X^n , получаем утверждение леммы. \square

Лемма 21. *Для любого i , если $\tilde{\gamma}_i \in T(f)$, $Z \in D_{i-1}$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, Z)$, $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\beta}$, то $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что для любых $\tilde{\gamma}_i \in T(f)$ и $Z \in D_i$ имеет место $\Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, Z) = \{\tilde{\gamma}_i\}$. Это следует из верного в случае $Z \in D_i$ соотношения $\varphi_Z(\tilde{\gamma}_i) = \tilde{\gamma}_i$.

Пусть для некоторых $\tilde{\gamma}_i \in T(f)$ и $Z \in D_{i-1}$ существуют наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из $\Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, Z)$ такие, что $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. Рассмотрим два множества $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z)$ и $\Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$. Нетрудно видеть, что $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z) \cap \Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z) \neq \emptyset$, так как $\varphi_Z(\tilde{\gamma}_i) \in \Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z) \cap \Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$.

Возможны два случая.

1) Одно из множеств $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z)$ и $\Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$ содержится в другом. Пусть $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z) \subset \Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$. Покажем, что в этом случае набор $\tilde{\beta}$ удовлетворяет условию а) i -го шага алгоритма.

Действительно, из того, что $\Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z) \neq \{\tilde{\beta}\}$ следует, что $Z \notin D_{i-1} \wedge \Delta(\tilde{\beta})$. Из $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z) \subset \Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$ получаем, что $\tilde{\alpha} \in \Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$. Для $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$. Итак, набор $\tilde{\beta}$ удовлетворяет условию а) алгоритма и, так как $\tilde{\gamma}_i \prec \tilde{\beta}$, следовательно, набор $\tilde{\gamma}_i$ условию б) не удовлетворяет.

В случае $\Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z) \subset \Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z)$ аналогичные рассуждения приводят к противоречию.

2) Ни одно из множеств $\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z)$ и $\Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z)$ не содержится в другом. В этом случае получаем $\tilde{\alpha} \neq \varphi_Z(\tilde{\gamma}_i) \neq \tilde{\beta}$. Так как $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$, то либо $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_Z(\tilde{\gamma}_i))$, либо $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_Z(\tilde{\gamma}_i))$. Имеем

$$\varphi_Z(\tilde{\alpha}) = \varphi_Z(\tilde{\beta}) = \varphi_Z(\tilde{\gamma}_i) \in \Delta^\circ(\tilde{\alpha}, Z) \cap \Delta^\circ(\tilde{\beta}, Z).$$

Легко убеждаемся, что если $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_Z(\tilde{\gamma}_i))$, то набор $\tilde{\alpha}$ удовлетворяет условию i -го шага алгоритма, а если $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_Z(\tilde{\gamma}_i))$, то этому условию а) удовлетворяет набор $\tilde{\beta}$. Следовательно, набор $\tilde{\gamma}_i$ условию б) не удовлетворяет. Полученное противоречие доказывает лемму. \square

Пусть D — некоторое разбиение множества X^n . Через φ_D будем обозначать ту неисправность из S^k , для которой $D(\varphi_D) = D$. Положим

$$\Delta^\circ(\tilde{\alpha}, D) = \{\tilde{\beta} \in \Delta(\tilde{\alpha}) : \tilde{\beta} \preceq \varphi_D(\tilde{\alpha})\}.$$

Лемма 22. *Для любого i , если $\tilde{\gamma}_i \in T(f)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1})$, $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\beta}$, то $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) \neq f(\tilde{\gamma}_i)$.*

Доказательство. Покажем, что для любых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ с указанными свойствами имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$. Другая часть утверждения леммы будет следовать из того, что существует набор $\tilde{\alpha}'$ из $\Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1})$ такой, что $f(\tilde{\gamma}_i) \neq f(\tilde{\alpha}')$.

Пусть для некоторого $\tilde{\gamma}_i \in T(f)$ существуют наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из $\Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1})$ такие, что $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$.

Заметим, что для любого $Z \in D_i$ имеет место

$$\Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1}) \cap \Delta(\tilde{\gamma}_i, Z) = \{\tilde{\gamma}_i\}.$$

Нетрудно видеть, что для любого набора $\tilde{\alpha}' \in \Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1})$ такого, что $\tilde{\alpha}' \neq \varphi_{D_{i-1}}(\tilde{\gamma}_i)$, имеет место $D(\tilde{\alpha}') \wedge D_{i-1} \neq D_{i-1}$. Легко убедиться, что в $\Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1})$ существуют два набора $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$, отличных от $\tilde{\gamma}_i$ и таких, что $\tilde{\alpha}' \prec \tilde{\beta}'$ и $f(\tilde{\alpha}') \neq f(\tilde{\beta}')$.

Действительно, если наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ несравнимы, то $\tilde{\alpha} \neq \varphi_{D_{i-1}}(\tilde{\gamma}_i) = \tilde{\beta}$ и имеет место либо $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_{D_{i-1}}(\tilde{\gamma}_i))$, тогда полагаем $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}' = \varphi_{D_{i-1}}(\tilde{\gamma}_i)$, либо $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi_{D_{i-1}}(\tilde{\gamma}_i))$, тогда полагаем $\tilde{\alpha}' = \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}' = \varphi_{D_{i-1}}(\tilde{\gamma}_i)$.

Итак, $\tilde{\alpha}' \prec \tilde{\beta}'$. Нетрудно видеть, что существуют два набора $\tilde{\alpha}''$ и $\tilde{\beta}''$ таких, что $\tilde{\alpha}' \preceq \tilde{\alpha}'' \prec \tilde{\beta}'' \preceq \tilde{\beta}'$ и для некоторого Z такого, что $Z \in D_{i-1}$ и $Z \notin D_i$, имеет место $\tilde{\beta}'' \in \Delta(\tilde{\alpha}'', Z)$ и $f(\tilde{\alpha}'') \neq f(\tilde{\beta}'')$. Это доказывает, что набор $\tilde{\alpha}''$ удовлетворяет условию а) i -го шага алгоритма и, значит, $\tilde{\gamma}_i$ этому условию не удовлетворяет. Противоречие доказывает лемму. \square

Для разбиений D' и D'' множества X^n будем писать $D' < D''$, если из того, что $Z' \in D'$ следует существование другого множества $Z'' \in D''$ такого, что $Z' \subseteq Z''$.

Лемма 23. *Имеет место $T(f) \in \mathcal{M}(f, S^k)$.*

Доказательство. Пусть φ — любая неисправность из S^k . Выберем такой набор $\tilde{\gamma}_i \in T(f)$, что $D(\varphi) < D_{i-1}$ и $D(\varphi) \not\subseteq D_i$ (для определенности в случае $i = 1$ положим $D_0 = \{X^n\}$). Если такого в $T(f)$ не окажется, то это значит, что $D(\varphi) < D_m$, где $|T(f)| =$

$= m$. В этом случае, очевидно, для неисправности φ имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))$ для любого $\tilde{\alpha} \in E_k^n$. Иначе можно было бы указать набор $\tilde{\gamma}_{m+1}$, удовлетворяющий условиям алгоритма построения $T(f)$. Если же соответствующий набор $\tilde{\gamma}_i$ есть, то нетрудно заметить, что имеет место $\varphi(\tilde{\gamma}_i) \in \Delta^\circ(\tilde{\gamma}_i, D_{i-1})$. Из предыдущей леммы получаем, что $f(\tilde{\gamma}_i) \neq f(\varphi(\tilde{\gamma}_i))$. Следовательно, $T(f) \in \mathcal{M}(f, S^k)$. \square

Из лемм 20 и 23 вытекает следующее утверждение.

Предложение 6. Для любой функции $f \in P_k^n$ имеет место

$$L(f, S^k) \leq n - 1.$$

2.3. Нижняя оценка для $L(n, S^k)$

Предложение 7. Для любых $n \geq 2$ и $k \geq 2$ имеет место

$$L(n, S^k) \geq n - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_{st}(x_1, \dots, x_n) = j_{k-1}(x_1) \& j_{k-1}(x_2) \& \dots \& j_{k-1}(x_n),$$

где $j_\nu(x)$ есть характеристическая функция значения ν , а $\&$ есть функция \min .

Положим

$$\mathcal{E}_i = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j \in E_{k-1}, \text{ если } j = i, \text{ и } \alpha_j = k - 1, \text{ если } i \neq j\}.$$

Покажем, что если $T \in \mathcal{M}(f_{st}, S^k)$, то не существуют i и j такие, что $i \neq j$, $T \cap \mathcal{E}_i = \emptyset$ и $T \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$.

Пусть для некоторых T , i и j , $i \neq j$, имеет место $T \cap \mathcal{E}_i = \emptyset$ и $T \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$. Рассмотрим неисправность φ , такую что $\{x_i, x_j\} \in D(\varphi)$ и $p(\varphi) = 1$. Заметим, что для любого $\tilde{\alpha} \in T$ имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))$. Действительно, из того, что $T \cap \mathcal{E}_i = \emptyset$ и $T \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ (и тем самым, $\alpha \notin \mathcal{E}_i$ и $\alpha \notin \mathcal{E}_j$) следует, что возможны следующие 3 ситуации:

а) $\tilde{\alpha} = (k - 1, k - 1, \dots, k - 1)$. Тогда $\varphi(\tilde{\alpha}) = (k - 1, k - 1, \dots, k - 1)$ и $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha})) = 1$;

б) $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и существует m такое, что $m \neq i$, $m \neq j$ и $\alpha_m < k - 1$. Тогда $\varphi(\tilde{\alpha}) \neq (k - 1, k - 1, \dots, k - 1)$ и $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha})) = 0$;

в) $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и для любого m такого, что $m \neq i$, $m \neq j$, выполняется $\alpha_m = k - 1$ и $\alpha_i < k - 1$, $\alpha_j < k - 1$. Тогда $\max\{\alpha_i, \alpha_j\} < k - 1$ и, значит, $\varphi(\tilde{\alpha}) \neq (k - 1, k - 1, \dots, k - 1)$, т. е. $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha})) = 0$.

Следовательно, $T \notin \mathcal{M}(f_{st}, S^k)$.

Из того, что множества $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ попарно не пересекаются, для любого теста $T \in \mathcal{M}(f_{st}, S^k)$ получаем $|T| \geq n - 1$. Следовательно, $L(f_{st}, S^k) \geq n - 1$, откуда следует доказательство утверждения. \square

Из предложений 6 и 7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Для любых $n \geq 2$ и $k \geq 2$ имеет место

$$L(n, S^k) = n - 1.$$

2.4. Подкласс $S^k(p)$

Теорема 6. Для любых $n \geq 2$, $k \geq 2$ и $p \in N_{n-1}$ справедливо

$$L(n, S^k(p)) = L(n, S^k).$$

Доказательство. Пусть p_1 и p_2 — два числа из N_{n-1} такие, что $p_1 < p_2$. Так как по определению имеем $S^k(p_1) \subseteq S^k(p_2)$, то получаем, что для любой функции $f \in P_k^n$, если $T \in \mathcal{M}(f, S^k(p_2))$, то $T \in \mathcal{M}(f, S^k(p_1))$, откуда следует, что

$$L(f, S^k(p_1)) \leq L(f, S^k(p_2))$$

и, следовательно,

$$L(n, S^k(p_1)) \leq L(n, S^k(p_2)).$$

Нетрудно видеть, что для функции $f_{st}(x_1, \dots, x_n)$, определенной в предыдущем параграфе, имеет место $L(f_{st}, S^k(1)) \geq n - 1$. Получаем

$$\begin{aligned} n - 1 &\leq L(f_{st}, S^k(1)) \leq L(n, S^k(1)) \leq \\ &\leq L(n, S^k(p)) \leq L(n, S^k) = n - 1. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует наше утверждение. \square

Замечание. Если в определении неисправностей из класса слипаний заменить функцию \max на функцию \min , то получим новый класс неисправностей, который назовем классом *конъюнктивных слипаний*.

В силу принципа двойственности не трудно убедиться, что теоремы 5 и 6 остаются в силе для этого класса.

ИНВЕРСНЫЕ НЕИСПРАВНОСТИ

3.1. Результаты

Здесь рассматривается множество P_2^n функций алгебры логики от n переменных. Пусть \oplus — сложение по mod 2 и $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\sigma} = \tilde{\gamma}$, где $\gamma_i = \alpha_i \oplus \sigma_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$In = \{\varphi_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \in E_2^n (\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\sigma})\}.$$

Введем операции суммы и умножения на число на множестве In следующим образом: $\varphi_{\tilde{\sigma}_1} + \varphi_{\tilde{\sigma}_2} = \varphi_{\tilde{\sigma}_1 \oplus \tilde{\sigma}_2}$ и $\alpha \cdot \varphi_{\tilde{\sigma}} = \varphi_{\alpha \cdot \tilde{\sigma}}$, где $\alpha \in E_2$, а $\alpha \cdot \tilde{\sigma} = \alpha \cdot (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (\alpha\sigma_1, \dots, \alpha\sigma_n)$.

Следующее утверждение устанавливается несложной проверкой.

Предложение 8. *Множество In с операциями $\{+, \cdot\}$ образует линейное пространство над полем вычетов по модулю 2.*

Обозначим через $\tilde{0}$ такой набор из E_2^n , каждая координата которого равна нулю.

По определению положим $F_{in}^2 = In \setminus \{\varphi_{\tilde{0}}\}$ и назовем его классом инверсных неисправностей.

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $L(n, F_{in}^2)$ — функция Шеннона тестовой сложности для класса функций, зависящих от n переменных, относительно инверсных неисправностей F_{in}^2 . Для любого $n \geq 1$ имеет место*

$$2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1 \leq L(n, F_{in}^2) \leq n.$$

Введем вес набора σ — число единиц в наборе σ — $\|\sigma\|$.

$\mathbb{S}_k^n = \{\sigma \in E_2^n : \|\sigma\| = k\}$ — это множество называется k -м слоем n -мерного булева куба.

$F_{in}^2(p) = \{\varphi_{\sigma} : \sigma \in \mathbb{S}_p^n\}$ — класс инверсных неисправностей, имеющих кратность не более, чем p .

Особый интерес вызывают неисправности из класса F_{in}^2 , имеющие кратность 1. Обозначим через \tilde{e}_i такой набор из E_2^n , у которого i -я координата равна единице, а все остальные равны нулю, тогда $F_{in}^2(1) = \{\varphi_{\tilde{e}_1}, \dots, \varphi_{\tilde{e}_n}\}$.

Для класса $F_{in}^2(1)$ мы установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, F_{in}^2(1)) = n - t$, где t определяется из $2^{t-1} + t \leq n \leq 2^t + t$.

3.2. Верхняя оценка для $L(n, F_{in}^2)$

Пусть $f \in P_2^n$, $\tilde{\alpha} \in E_2^n$, $A \subseteq E_2^n$ и $\nu \in E_2$, положим

$$\Phi(f, \tilde{\alpha}) = \{\varphi \in In : f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))\};$$

$$\Phi(f, A) = \bigcap_{\tilde{\alpha} \in A} \Phi(f, \tilde{\alpha});$$

$$\mathcal{U}(f, \tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta} \in E_2^n : \exists \varphi \in \Phi(f, \tilde{\alpha})(\tilde{\beta} = \varphi(\tilde{\alpha}))\};$$

$$\mathcal{U}(f, \tilde{\alpha})|_A = \{\tilde{\beta} \in E_2^n : \exists \varphi \in \Phi(f, A)(\tilde{\beta} = \varphi(\tilde{\alpha}))\};$$

$$N_\nu(f) = \{\tilde{\alpha} \in E_2^n : f(\tilde{\alpha}) = \nu\};$$

$$N_\nu(f, A) = \{\tilde{\alpha} \in A : f(\tilde{\alpha}) = \nu\}.$$

Лемма 24. Для любых функции $f \in P_2^n$ и подмножества $A \subseteq E_2^n$, если $\Phi(f, A) \setminus \Phi(f, E_2^n) \neq \emptyset$, то существует такое подмножество $B \subseteq E_2^n$, что $|B| = |A| + 1$ и $|\Phi(f, B)| \leq \frac{1}{2} |\Phi(f, A)|$.

Доказательство. Пусть $f \in P_2^n$, $A \subseteq E_2^n$ и выполнено $\Phi(f, A) \setminus \Phi(f, E_2^n) \neq \emptyset$, тогда существует набор $\tilde{\beta}_0 \in E_2^n$, для которого имеет место $N_0(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A) \neq \emptyset$ и $N_1(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A) \neq \emptyset$.

Пусть $|N_\nu(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A)| \leq |N_{\bar{\nu}}(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A)|$.

Возможны два случая.

а) $\tilde{\beta}_0 \in N_\nu(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A)$. Нетрудно видеть, что

$$\Phi(f, A \cup \{\tilde{\beta}_0\}) = \{\varphi \in In : \varphi(\tilde{\beta}_0) \in N_\nu(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Phi(f, A \cup \{\tilde{\beta}_0\})| &= |\{\varphi \in In : \varphi(\tilde{\beta}_0) \in N_\nu(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A)\}| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |\mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_0)|_A| = \frac{1}{2} |\Phi(f, A)|. \end{aligned}$$

б) $\tilde{\beta}_o \in N_{\tilde{\nu}}(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_o)|_A)$. Пусть $\tilde{\alpha}_o \in N_{\tilde{\nu}}(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_o)|_A)$ и $\tilde{\alpha}_o = \varphi_o(\tilde{\beta}_o)$. Пусть $B = \{\tilde{\alpha}_o\} \cup \varphi_o(A)$, где

$$\varphi_o(A) = \{\tilde{\gamma} \in E_2^n : \exists \tilde{\sigma} \in A \quad (\tilde{\gamma} = \varphi_o(\tilde{\sigma}))\}.$$

Покажем, что B — искомое множество.

Докажем, что имеет место $\varphi_o + \Phi(f, A) = \Phi(f, \varphi_o(A))$, где $\varphi_o + \Phi(f, A) = \{\varphi \in In : \exists \varphi' \in \Phi(f, A) \quad (\varphi = \varphi_o + \varphi')\}$.

а) Пусть $\varphi \in \varphi_o + \Phi(f, A)$. Значит $\varphi = \varphi_o + \varphi'$, где $\varphi' \in \Phi(f, A)$. Пусть $\tilde{\alpha} \in \varphi_o(A)$. Имеем $\tilde{\alpha} = \varphi_o(\tilde{\beta})$ или $\tilde{\beta} = \varphi_o(\tilde{\alpha})$, где $\tilde{\beta} \in A$. Из того, что $\varphi', \varphi_o \in \Phi(f, A)$ и, учитывая коммутативное и нильпотентное свойства операции $+$, получаем

$$\begin{aligned} f(\varphi(\tilde{\alpha})) &= f(\varphi'(\varphi_o(\tilde{\alpha}))) = f(\varphi'(\varphi_o(\varphi_o(\tilde{\beta})))) = \\ &= f(\varphi'(\tilde{\beta})) = f(\tilde{\beta}) = f(\varphi_o(\tilde{\alpha})) = f(\tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

Из равенства $f(\varphi(\tilde{\alpha})) = f(\tilde{\alpha})$ следует, что $\varphi \in \Phi(f, \varphi_o(A))$. Значит, $\varphi_o + \Phi(f, A) \subseteq \Phi(f, \varphi_o(A))$.

б) Пусть $\varphi \in \Phi(f, \varphi_o(A))$. Рассмотрим такую неисправность φ' , что $\varphi = \varphi' + \varphi_o$. Покажем, что $\varphi' \in \Phi(f, A)$. Из того, что $\varphi_o \in \Phi(f, A)$, $\varphi \in \Phi(f, \varphi_o(A))$ и $\varphi' = \varphi + \varphi_o$, для любого набора $\tilde{\alpha} \in A$ получаем $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi_o(\tilde{\alpha})) = f(\varphi(\varphi_o(\tilde{\alpha}))) = f(\varphi'(\tilde{\alpha}))$. Из равенства $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi'(\tilde{\alpha}))$ следует, что $\varphi' \in \Phi(f, A)$. Следовательно, $\varphi \in \varphi_o + \Phi(f, A)$. Значит, $\Phi(f, \varphi_o(A)) \subseteq \varphi_o + \Phi(f, A)$.

Из полученного равенства $\varphi_o + \Phi(f, A) = \Phi(f, \varphi_o(A))$ выводим

$$|\Phi(f, \varphi_o(A))| = |\varphi_o + \Phi(f, A)| = |\Phi(f, A)|,$$

$$\mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_o)|_A = \mathcal{U}(f, \tilde{\alpha}_o)|_{\varphi_o(A)},$$

$$\begin{aligned} |\Phi(f, B)| &= |\Phi(f, \{\tilde{\alpha}_o\} \cup \varphi_o(A))| = \\ &= |\{\varphi \in In : \varphi(\tilde{\alpha}_o) \in N_{\tilde{\nu}}(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\alpha}_o)|_{\varphi_o(A)})\}| = |N_{\tilde{\nu}}(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\alpha}_o)|_{\varphi_o(A)})| = \\ &= |N_{\tilde{\nu}}(f, \mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_o)|_A)| \leq \frac{1}{2} |\mathcal{U}(f, \tilde{\beta}_o)|_A| = \frac{1}{2} |\Phi(f, A)|. \end{aligned}$$

Неравенство $|\Phi(f, B)| \leq \frac{1}{2} |\Phi(f, A)|$ доказывает лемму. \square

Предложение 9. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, F_{in}^2) \leq n$.

Доказательство. Докажем, что для любой функции $f \in P_2^n$ найдется тест $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ такой, что $|T| \leq n$. Опишем алгоритм построения такого теста функции f .

Базис индукции. Пусть $|N_\nu(f)| \leq |N_{\bar{\nu}}(f)|$. Если $N_\nu(f) = \emptyset$, то для любого теста $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ имеет место $T = \emptyset$. Если же $N_\nu \neq \emptyset$, то выберем любой набор из $N_\nu(f)$, обозначим его через $\tilde{\alpha}_1$. Положим $A_1 = \{\tilde{\alpha}_1\}$. Очевидно, что $|\Phi(f, A_1)| \leq 2^{n-1}$.

Индуктивный переход. Предположим, что для множества A_{m-1} имеет место $|\Phi(f, A_{m-1})| \leq 2^{n-(m-1)}$. Из леммы 24 следует, что если $\Phi(f, A_{m-1}) \setminus \Phi(f, E_2^n) \neq \emptyset$, то существует множество A_m такое, что $|A_m| = m$ и $|\Phi(f, A_m)| \leq \frac{1}{2} |\Phi(f, A_{m-1})| \leq 2^{n-m}$. В случае, если для множества A_{m-1} выполнено $\Phi(f, A_{m-1}) \setminus \Phi(f, E_2^n) = \emptyset$, то работа алгоритма завершается положением $T = A_{m-1}$.

Нетрудно видеть, что наш алгоритм выдает множество T со свойствами $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ и $|T| \leq n$.

Для любой функции $f \in P_2^n$ показали, что имеет место $L(f, F_{in}^2) \leq n$. Следовательно, $L(n, F_{in}^2) \leq n$. \square

3.3. Нижние оценки для $L(n, F_{in}^2)$

Пусть $n = 2m + 1$. Рассмотрим функцию

$$f_{in}^n(x_1, \dots, x_n) = x_{2m+1} \oplus \sum_{i=1}^m x_i \& x_{m+i}.$$

Предложение 10. *Для любого нечетного числа n имеет место $L(f_{in}^n, F_{in}^2) \geq n$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на две части.

1) Покажем, что для любой неисправности $\varphi \in F_{in}^2$ существует набор $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ такой, что $f_{in}^n(\tilde{\alpha}) \neq f_{in}^n(\varphi(\tilde{\alpha}))$.

Пусть $\varphi = \varphi_{\tilde{\sigma}}$, где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$,

$$\begin{aligned} f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(x_1, \dots, x_n)) &= f_{in}^n(x_1 \oplus \sigma_1, \dots, x_n \oplus \sigma_n) = \\ &= x_{2m+1} \oplus \sigma_{2m+1} \oplus \sum_{i=1}^m (x_i + \sigma_i)(x_{m+i} + \sigma_{m+i}) = \\ &= f_{in}^n(x_1, \dots, x_n) \oplus \sum_{i=1}^m (\sigma_{m+i}x_i \oplus \sigma_i x_{m+i}) \oplus f_{in}^n(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \end{aligned}$$

Возможны два случая.

а) $f_{in}^n(\tilde{\sigma}) = 1$. Тогда очевидно, что для набора $\tilde{0}$ имеет место $f_{in}^n(\tilde{0}) \neq f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{0}))$.

б) $f_{in}^n(\tilde{\sigma}) = 0$. Пусть $\sigma_r \neq 0$, где $r \leq 2m$. Если $r \leq m$, то получаем $f_{in}^n(\tilde{e}_{m+r}) \neq f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{e}_{m+r}))$. Если же $r > m$, то $f_{in}^n(\tilde{e}_{r-m}) \neq f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{e}_{r-m}))$. В случае, когда для любого $r \leq 2m$ имеем $\sigma_r = 0$, из условия $f_{in}^n(\tilde{\sigma}) = 0$ следует $\tilde{\sigma} = \tilde{0}$, что исключается.

2) Покажем, что для любого множества $A \subseteq E_2^n$, такого, что $|A| = n - 1$, существует неисправность $\varphi \in F_{in}^2$, для которой имеет место $f_{in}^n(\tilde{\alpha}) = f_{in}^n(\varphi(\tilde{\alpha}))$ для любого $\tilde{\alpha} \in A$.

Пусть $A = \{\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^{n-1}\}$, где $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ для каждого $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 y_{m+1} \oplus & \dots & \oplus \alpha_m^1 y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^1 y_1 \oplus & \dots & \oplus \alpha_{2m}^1 y_m = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{2m} y_{m+1} \oplus & \dots & \oplus \alpha_m^{2m} y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^{2m} y_1 \oplus & \dots & \oplus \alpha_{2m}^{2m} y_m = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Если система (3.1) имеет ненулевое решение y'_1, \dots, y'_{2m} , то для неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}'}$, где $\tilde{\sigma}' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$, $\sigma'_1 = y'_1, \dots, \sigma'_{2m} = y'_{2m}$, $\sigma'_{2m+1} = \sum_{i=1}^m y'_i y'_{m+i}$, имеет место $f_{in}^n(\tilde{\alpha}^i) = f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}'}(\tilde{\alpha}^i))$ для любого $\tilde{\alpha}^i \in A$. В противном случае ранг матрицы $\|\alpha_{ij}^i\|$, $i, j \in \mathbb{N}_{2m}$, равен $2m$. Тогда рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 y_{m+1} \oplus & \dots & \oplus \alpha_m^1 y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^1 y_1 \oplus & \dots & \oplus \alpha_{2m}^1 y_m = 1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{2m} y_{m+1} \oplus & \dots & \oplus \alpha_m^{2m} y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^{2m} y_1 \oplus & \dots & \oplus \alpha_{2m}^{2m} y_m = 1, \end{array} \right.$$

которая имеет решение y''_1, \dots, y''_{2m} . Очевидно, что решение не может быть нулевым. Полагаем $\sigma''_1 = y''_1, \dots, \sigma''_{2m} = y''_{2m}$, $\sigma''_{2m+1} = \sum_{i=1}^m y''_i y''_{m+i} \oplus 1$, $\tilde{\sigma}'' = (\sigma''_1, \dots, \sigma''_n)$. Нетрудно видеть, что для неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}''}$ выполнено $f_{in}^n(\tilde{\alpha}^i) = f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}''}(\tilde{\alpha}^i))$ для любого $\tilde{\alpha}^i \in A$.

Из 1) и 2) получаем, что для любого множества $A \in E_2^n$ такого, что $|A| \leq n - 1$ имеет место $A \notin \mathcal{M}(f_{in}^n, F_{in}^2)$. \square

Пусть $n = 2m$. Положим

$$f_{in}^n(x_1, \dots, x_n) = x_{2m} \& f_{in}^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Предложение 11. Для любого четного числа n имеет место $L(f_{in}^n, F_{in}^2) \geq n - 1$.

Доказательство. Очевидно, что если $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0)$, то для любой неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}}$ тест функции f_{in}^n должен включать набор вида $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$. Следовательно, любой тест функции T должен включать тест подфункции $f_{in}^n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$, откуда по предложению 10 получаем $|T| \geq n - 1$. \square

Предложения 9, 10 и 11 доказывают следующее утверждение.

Теорема 7. Для любого $n \geq 1$ имеет место $2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq L(n, F_{in}^2) \leq n$.

3.4. Подкласс $F_{in}^2(\mathbf{1})$

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 8. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, F_{in}^2(\mathbf{1})) = n - t$, где t определяется из $2^{t-1} + t \leq n \leq 2^t + t$.

Лемма 25. Для любой функции $f \in B_2^n$ выполнено $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2(\mathbf{1}))$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in N_n$ существует $\nu \in E_2$ такое, что $R_\nu(i, f) \cap T \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть для некоторого $i \in N_n$ и множества T имеет место $(R_0(i, f) \cup R_1(i, f)) \cap T = \emptyset$. Нетрудно видеть, что точно в этом случае для любого набора $\tilde{\alpha} \in T$ выполнено $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi_{\tilde{e}_i}(\tilde{\alpha}))$. \square

Из леммы 25 вытекает, что для доказательства теоремы 8 мы можем воспользоваться многими понятиями и утверждениями, приведенными в 1.2.

Предложение 12. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, F_{in}^2(\mathbf{1})) \geq n - t$, где t определяется из $2^{t-1} + t \leq n \leq 2^t + t$.

Доказательство. Для оценки функции $L(n, F_{in}^2(\mathbf{1}))$ воспользуемся функцией f_c , задаваемой соотношением (1.6), для $k = 2$. Для любых $i > t, j > t, i \neq j, \nu \in E_2$ и $\mu \in E_2$ имеем $R_\nu(i, f_c) \cap R_\mu(j, f_c) = \emptyset$.

По лемме 25 получаем, что для любого теста $T \in \mathcal{M}(f_c, F_{in}^2(\mathbf{1}))$ имеет место $|T| \geq n - t$. Следовательно, $L(f_c, F_{in}^2(\mathbf{1})) \geq n - t$. \square

Рассмотрим $f \in B_2^n$ и множество $P(X_f^\sigma, h)$, где $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$. Как отмечалось, любая подфункция из $P(X_f^\sigma, h)$ зависит существенно не более, чем от одной переменной. Две подфункции g_1 и g_2 из $P(X_f^\sigma, h)$ назовем соседними по переменной $x_j \in X_f^\delta$, если определяющие их подстановки значений из E_2 вместо переменных из X_f^δ отличаются только в координате, соответствующей переменной x_j . В этом случае пишем $g_1 = g_2|x_j$. Заметим, что $g_2|x_j$ определяется однозначно.

Лемма 26. *Если $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$, $g \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, f)$, $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\} \subseteq X_f^\delta$, $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \subseteq X_f^\sigma \setminus \{x_i\}$ и для любого $r \in N_s$ имеет место $g|x_{j_r} \in P^*({x_{i_r}}, f)$, то для любого $\nu \in E_2$ существует набор $\tilde{\alpha} \in E_2^n(g)$, для которого выполнено*

$$\tilde{\alpha} \in R_\nu(i, f) \cap R_{\nu_{j_1}}(j_1, f) \cap \dots \cap R_{\nu_{j_s}}(j_s, f),$$

где $\nu_{j_1}, \dots, \nu_{j_s}$ определяются подфункцией g .

Доказательство. Обозначим

$$x^v = \begin{cases} x, & \text{если } v = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } v = 0. \end{cases}$$

Пусть подфункция g получается подстановкой в h вместо каждой переменной x_j из X_f^δ константы λ_j . Так как $g \in P(X_f^\sigma, h) \cap P^*({x_i}, f)$, то $g = x_i$ или $g = \bar{x}_i$. Пусть $g = x_i^v$. Следовательно, если $\tilde{\alpha} \in E_2^n(g)$ — такой набор, что $\alpha_j = \lambda_j$ для каждого $x_j \in X_f^\delta$, то $\tilde{\alpha} \in R(i, f)$.

Пусть $g|x_{j_r} = x_{i_r}^{\nu_r}$ для любого $r \in N_s$.

Возьмем произвольное $\nu \in E_2$ и рассмотрим произвольный набор $\tilde{\alpha} \in E_2^n(g)$, такой, что $\alpha_i = \nu$ и $\alpha_j = \lambda_j$ для каждого $x_j \in X_f^\delta$. Понятно, что $\tilde{\alpha} \in R_\nu(i, f)$ и $f(\tilde{\alpha}) = h_\nu^i = \nu^v$. Обозначим $\gamma = \nu^{\bar{v}} = \bar{f}(\tilde{\alpha})$. Для каждого $r \in N_s$ установим $\alpha_{i_r} = \gamma^{\nu_r}$. Возьмем произвольное $r \in N_s$. Рассмотрим набор $\tilde{\beta}$, соседний к $\tilde{\alpha}$ по переменной x_{j_r} . Очевидно, $f(\tilde{\beta}) = \gamma^{\nu_r^{\nu_r}} = \gamma = \bar{f}(\tilde{\alpha})$. Следовательно, если обозначить $\nu_{j_r} = \gamma^{\nu_r}$, то $\tilde{\alpha} \in R_{\nu_{j_r}}(j_r, f)$. В силу произвольности выбора r лемма доказана. \square

Как мы уже отмечали, из определения характеристики $\delta(f)$ следует, что для любых $x_j \in X_f^\delta$ и $\nu \in E_2$ существует $x_i \in X_f^\sigma$ такое, что $h_\nu^i \notin P^*({x_i}, f)$.

Лемма 27. *Если для функции f выполнено $\sigma(f) > 2^{\delta(f)-1}$ и $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$, то для любого $x_j \in X_f^\delta$ существует $\nu \in E_2$ такое, что подфункция h_ν^j зависит существенно более чем от $2^{\delta(f)-2}$ переменных из X_f^σ .*

Доказательство. Рассмотрим произвольную переменную $x_j \in X_f^\delta$. Пусть h_ν^j зависит существенно от t_ν переменных из X_f^σ , $\nu = 0, 1$. Тогда h зависит существенно от не более, чем от $t_0 + t_1$ переменных из X_f^σ . Поэтому если $t_0 \leq 2^{\delta(f)-2}$ и $t_1 \leq 2^{\delta(f)-2}$, то $t_0 + t_1 \leq 2^{\delta(f)-1} < \sigma(f)$, что противоречит тому, что h зависит существенно от всех $\sigma(f)$ переменных из X_f^σ . \square

Пусть $Y \subseteq X^n$. Через $J(Y, f)$ будем обозначать такое подмножество E_2^n , что для каждого $x_i \in Y$ существует $\nu_i \in E_2 : R_{\nu_i}(i, f) \cap J(Y, f) \neq \emptyset$ и $|J(Y, f)| = n$. Если $|Y|$ — четно и Y разбивается на пары связанных переменных, то через $W(Y, f)$ обозначим такое подмножество E_2^n , что $|W(Y, f)| = \frac{1}{2}|Y|$ и для каждого $x_i \in Y$ существует $\nu_i \in E_2$, что $R_{\nu_i}(i, f) \cap W(Y, f) \neq \emptyset$.

Лемма 28. Если для функции $f \in P_2^n$ выполнено $\sigma(f) > 2^{\delta(f)-1}$, то имеет место $L(f, F_{in}^2(1)) \leq n - \delta(f)$.

Доказательство. Пусть $h \in P^\circ(X_f^{\sigma+\delta}, f)$. Опишем алгоритм построения множества $W_{\delta(f)}$.

Шаг 1. Фиксируем $x_{j_1} \in X_f^\delta$. Пусть $\nu_1 \in E_2$ такое, что подфункция $h_{\nu_1}^{j_1}$ зависит существенно более чем от $2^{\delta(f)-2}$ переменных из множества X_f^σ (лемма 27). Пусть x_{i_1} — это переменная из X_f^σ такая, что $h_{\nu_1}^{j_1} \notin P^*(\{x_{i_1}\}, f)$. Очевидно, что x_{j_1} и x_{i_1} связаны для f . В самом деле, так как $h_{\nu_1}^{j_1} \notin P^*(\{x_{i_1}\}, f)$, то $h_{\bar{\nu}_1}^{j_1} \in P^*(\{x_{i_1}\}, f)$, т.е. существует набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $\alpha_{j_1} = \bar{\nu}_1$ и $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_{i_1}, \dots, \alpha_n)$ и функция $g(x_{j_1}, x_{i_1}) = f(\alpha_1, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{i_1}, \dots, \alpha_n)$ существенно зависит от обоих переменных. Значит, множество $W(\{x_{i_1}, x_{j_1}\}, f)$ определено и содержит один набор, который мы обозначим через $\tilde{\alpha}_1$. Положим $h^{(1)} = h_{\nu_1}^{j_1}$, $W_1 = \{\tilde{\alpha}_1\}$.

Шаг m . Пусть $x_{j_m} \in X_f^\delta$, $x_{j_m} \neq x_{j_r}$ для $r < m$. Пусть $\nu_m \in E_2$ такое, что подфункция $h_{\nu_m}^{(m-1)j_m} \notin P^*(\{x_{i_m}\}, f)$. Пусть $\tilde{\alpha}_m \in W(\{x_{j_m}, x_{i_m}\}, f)$. Положим $h^{(m)} = h_{\nu_m}^{(m-1)j_m}$, $W_m = W_{m-1} \cup \{\tilde{\alpha}_m\}$.

Алгоритм определяет множество $W_{\delta(f)}$ и подмножество переменных $X_f^\sigma(W_{\delta(f)}) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{\delta(f)}}\}$. Имеем $W_{\delta(f)} = W(X_f^\delta \cup X_f^\sigma(W_{\delta(f)}), f)$ и $|W_{\delta(f)}| = \delta(f)$. Нетрудно видеть, что множество $W_{\delta(f)} \cup J(X^n \setminus (X_f^\delta(W_{\delta(f)}), f) = T_\delta(f)$ является тестом функции f для класса $F_{in}^2(1)$, причем $|T_\delta(f)| \leq n - \delta(f)$. Что и требовалось доказать. \square

Лемма 29. Если для функции $f \in P_2^n$ выполнено $\sigma(f) > 2^{\delta(f)-1}$ и $X_f^{\tau-\delta} \neq \emptyset$, то

$$L(f, F_{in}^2(1)) \leq n - (\delta(f) + 1).$$

Доказательство. Пусть $x_r \in X_f^{\tau-\delta}$. Известно, что x_r связана с некоторой переменной x_l из X_f^σ . Возможны два случая.

а) $x_l \notin X_f^\sigma(W_{\delta(f)})$. Тогда множество

$$W_{\delta(f)} \cup J(X^n \setminus (X_f^\delta \cup X_f^\sigma(W_{\delta(f)}) \cup \{x_r, x_l\}), f) \cup W(\{x_r, x_l\}, f)$$

является искомым тестом функции f .

б) $x_l \in X_f^\sigma(W_{\delta(f)})$. Пусть $x_l = x_{i_m}$. Это значит, что $h_{\nu_m}^{(m-1)j_m} \notin P^*(\{x_{i_m}\}, f)$. Если существует другая переменная из X_f^σ , удовлетворяющая условиям m -го шага алгоритма, то после замены оказывается, что $x_l \notin X_f^\sigma(W_{\delta(f)})$, т. е. попадаем в а).

Если же для $h^{(m-1)}$ существует единственная переменная $x_{i_m} = x_l$ такая, что $h_{\nu_m}^{(m-1)j_m} \in P^*(\{x_{i_m}\}, f)$ и $h_{x_{j_m}=\nu_m}^{(m-1)} \notin P^*(\{x_{i_m}\}, f)$, то рассмотрим некоторую подфункцию $g \in P(X_f^\sigma, h^{(m-1)}) \cap P^*(\{x_{i_m}\}, f)$. Из того, что функция $h^{(m-1)}$ существенно зависит более, чем от $2^{\delta(f)-m}$ переменных из X_f^σ , получаем, что подфункция $g|_{x_{j_m}}$ удовлетворяет условиям леммы 26, т. е. все соседние подфункции функции $g|_{x_{j_m}}$ по переменным $x_{j_m}, x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_{\delta(f)}}$ зависят от разных переменных из X_f^σ . Значит, существует набор $\alpha_o \in R_{\nu_m}(j_m, f) \cap \dots \cap R_{\nu_{\delta(f)}}(j_{\delta(f)}, f)$, причем для некоторых x_{i_o} и ν_o выполняется $\tilde{\alpha}_o \in R_{\nu_o}(i_o, f)$.

Рассмотрим множество

$$T_\delta^\circ(f) = W_{m-1} \cup \{\tilde{\alpha}_o\} \cup W(\{x_l, x_r\}, f) \cup$$

$$\cup J(X^n \setminus (X_f^\delta \cup \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}, x_{i_o}, x_l, x_r\}), f).$$

Нетрудно видеть, что $T_\delta^\circ(f) \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2(1))$ и $|T_\delta^\circ(f)| \leq n - (\delta(f) + 1)$. \square

Лемма 30. Если для функции $f \in P_2^n$ выполнено $\sigma(f) > 2^{t-2}$, где $2^{t-1} + t \geq n \geq 2^t + t$, то $L(f, F_{in}^2(1)) \leq n - t$.

Доказательство. При $\delta(f) = t - 1$ лемма 30 следует из леммы 29. При $\delta(f) = t$ по лемме 28 недоказанным остается лишь случай, когда $\sigma(f) = 2^{t-1}$. При этом, незначительно изменив алгоритм, описанный в лемме 28, получаем требуемое множество. Точнее, указанный алгоритм начинает работать, как только выполнено условие: существуют $x_{j_1} \in X_f^\delta$ и $\nu_1 \in E_2$ такие, что подфункция $h_{\nu_1}^{j_1}$ зависит существенно более чем от 2^{t-2} переменных из множества X_f^σ . Если же это условие не выполнено, то в искомое множество включаем переменную

$x_{i_1} \in X_f^\sigma$ такую, что $h_{v_1}^{j_1} \notin P^*(\{x_{i_1}\}, f)$. Заметим, что для $h_{v_1}^{j_1}$ выполнено $\delta(h_{v_1}^{j_1}) = t - 1$. Для этой подфункции вновь проверяем вышеуказанное условие и т. д. В итоге получаем искомым тест. \square

Лемма 31. Если для функции $f \in P_2^n$ выполнено $\sigma(f) \leq 2^{t-2}$, где $2^{t-1} + t \leq n \leq 2^t + t$, то $L(f, F_{in}^2(1)) \leq n - t$.

Доказательство. Из леммы 9 явствует, что есть множество $X^\omega \subseteq X_f^{\tau-\delta}$ такое, что для $X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega$ определено множество $W(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f)$ и существует $X_f^\sigma(\omega) \subseteq X_f^\sigma$ такое, что X^ω и $X_f^\sigma(\omega)$ в соответствующем графе находятся в паросочетании и, следовательно, определено множество $W(X^\omega \cup X_f^\sigma(\omega), f)$. Рассмотрим тест

$$T_\omega(f) = W(X_f^{\tau-\delta} \setminus X^\omega, f) \cup W(X^\omega \cup X_f^\sigma(\omega), f) \cup J((X_f^\sigma \setminus X_f^\sigma(\omega)) \cup X_f^\delta).$$

Получаем

$$|T_\omega(f)| \leq n - \left(\frac{\tau(f) - \delta(f) - \omega}{2} + \omega \right).$$

Если $X^\omega \neq \emptyset$, получим

$$|T_\omega(f)| \leq n - \left(\frac{\tau(f) - \delta(f)}{2} + 1 \right). \quad (3.2)$$

Если же $X^\omega = \emptyset$, то, так как в $X_f^{\sigma+\delta}$ существует пара связанных переменных, мы можем множество $J(X_f^{\sigma+\delta}, f)$ выбрать так, что $|J(X_f^{\sigma+\delta}, f)| \leq \sigma(f) + \delta(f) - 1$. Опять получаем неравенство (3.2).

Предположим, что $|T_\omega(f)| > n - t$. Получим

$$\frac{\tau(f) + \delta(f)}{2} + 1 < t.$$

Имеем $\tau(f) = n - \sigma(f) \leq 2^{t-1} + t - 2^{t-2}$, $\delta(f) \leq t - 2$. Получаем

$$\frac{2^{t-2} + 2}{2} + 1 < t, \quad 2^{t-3} + 2 < t.$$

Последнее неравенство неразрешимо. Противоречие доказывает лемму. \square

Из лемм 30 и 31 получаем верхнюю оценку для $L(n, F_{in}^2(1))$.

Предложение 13. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, F_{in}^2(1)) \leq n - t$.

Предложения 12 и 13 доказывают теорему 8.

Замечание. Утверждение теоремы 8 верно для любого базиса пространства In .

РАЗНОТИПНЫЕ НЕИСПРАВНОСТИ

4.1. Классы разнотипных неисправностей

В этом параграфе будут рассматриваться ситуации, когда возможно появление неисправностей разных типов. Точнее, рассматриваются различные классы, являющиеся объединением некоторых классов неисправностей, определенных в предыдущих главах. Для таких классов оценивается функция Шеннона для длины проверяющего теста.

Лемма 32. *Для любой функции $f \in P_2^n$ и любого теста $T \in \mathcal{M}(f, C^2)$ имеет место $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2(1))$.*

Доказательство. Лемма 32 вытекает из предложения 1 и леммы 25. Действительно, в силу предложения 1 из соотношения $T \in \mathcal{M}(f, C^2)$ следует, что для любого $i \in N_n$, если $R(i, f) \neq \emptyset$, то существует $\nu \in E_2$ такое, что выполнено $R_\nu(i, f) \cap T \neq \emptyset$. Это по лемме 25 является достаточным условием для того, чтобы тест T принадлежал множеству $\mathcal{M}(f, F_{in}^2(1))$. \square

Предложение 14. *Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, C^2 \cup F_{in}^2(1)) = L(n, C^2)$.*

Доказательство. Из леммы 32 следует, что для любой функции $f \in P_2^n$ имеет место $L(f, C^2 \cup F_{in}^2(1)) = L(f, C^2)$. В силу произвольности f предложение доказано. \square

Функцию $f \in P_k^n$ назовем *инвариантной относительно неисправности φ* , если для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))$.

Для неисправностей φ_1 и φ_2 из класса S^k будем писать $\varphi_1 < \varphi_2$, если выполнено $D(\varphi_1) < D(\varphi_2)$, где отношение $<$ для двух разбиений множества X^n было определено в параграфе 2 гл. 2.

Нетрудно видеть, что если для неисправностей φ_1 и φ_2 из S^k выполнено $\varphi_1 < \varphi_2$, то имеет место $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_1 = \varphi_2$, т. е. для

любого набора $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ справедливо

$$\varphi_1(\varphi_2(\tilde{\alpha})) = \varphi_2(\varphi_1(\tilde{\alpha})) = \varphi_2(\tilde{\alpha}).$$

Предложение 15. Для любых $n \geq 2$ и $k \geq 2$ имеет место

$$L(n, C^k) \leq L(n, C^k \cup S^k) \leq 2n.$$

Доказательство. Пусть $f \in P_k^n$, определим по f число $p_0(f)$ следующим образом:

- 1) существует неисправность $\varphi_0 \in S^k$ такая, что f инвариантна относительно φ_0 и $p(\varphi_0) = p_0$;
- 2) не существует p' , удовлетворяющего условию 1) и такого, что $p' > p_0$.

Если в S^k нет неисправностей, относительно которых f инвариантна (тождественное преобразование не считаем неисправностью), то полагаем $p_0 = 0$.

Докажем, что для любого теста $T \in \mathcal{M}(f, S^k)$ существует подмножество номеров $N^0 \subseteq N_n$, для которого выполнено $|N^0| \geq n - (p_0 + 1)$ и для любого $i \in N^0$ существует $\nu \in E_k$ такое, что $R_\nu(i, f) \cap T \neq \emptyset$.

Предположив противное, получаем, что для некоторого теста $T \in \mathcal{M}(f, S^k)$ имеются два множества $Z_l(\varphi_0)$ и $Z_m(\varphi_0)$ в разбиении $D(\varphi_0) = \{Z_1(\varphi_0), \dots, Z_{q_{\varphi_0}}(\varphi_0)\}$ такие, что для любого $x_i \in Z_l(\varphi_0) \cup Z_m(\varphi_0)$ существует $\nu \in E_k$, для которых имеет место $R_\nu(i, f) \cap T = \emptyset$.

Возможны два случая.

1) $p_0 = 0$. Значит, существуют x_l и x_m из X^n такие, что для любых $\lambda, \mu \in E_k$ выполнено $(R_\lambda(l, f) \cup R_\mu(m, f)) \cap T = \emptyset$. Рассмотрим неисправность $\varphi' \in S^k$, которая определяется условиями $\{x_l, x_m\} \in D(\varphi')$ и $p(\varphi') = 1$. Очевидно, что $\varphi_0 < \varphi'$ и существует набор $\tilde{\alpha} \in T$, для которого имеет место $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi'(\tilde{\alpha}))$. Тогда для наборов $\tilde{\alpha}$ и $\varphi'(\tilde{\alpha})$ выполнено либо $(\tilde{\alpha}, \varphi'(\tilde{\alpha})) \in R(m, f)$, либо $(\tilde{\alpha}, \varphi'(\tilde{\alpha})) \in R(l, f)$. Получили противоречие с принятым условием.

2) $p_0 \geq 1$. Рассмотрим неисправность $\varphi^* \in S^k$, определяющуюся соотношениями $\varphi_0 < \varphi^*$, $p(\varphi^*) = p(\varphi_0 + 1)$, $Z_l(\varphi_0) \cup Z_m(\varphi_0) \in D(\varphi^*)$. Так как $p(\varphi^*) > p(\varphi_0)$, то из определения φ_0 следует, что в тесте T существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi^*(\tilde{\alpha}))$.

Пусть μ есть максимальное из значений, принимаемых переменными из $Z_m(\varphi_0)$ в наборе $\tilde{\alpha}$. Так же определяется λ для множества $Z_l(\varphi_0)$.

Рассмотрим две ситуации:

а) $\mu = \lambda$. Нетрудно видеть, что в этом случае имеем $\varphi_0(\tilde{\alpha}) = \varphi^*(\tilde{\alpha})$. Получаем $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi_0(\tilde{\alpha})) = f(\varphi^*(\tilde{\alpha})) \neq f(\tilde{\alpha})$, что противоречиво;

б) $\mu \neq \lambda$. Без ограничения общности положим $\mu > \lambda$. Пусть $x_r \in \mathbb{Z}_l(\varphi_\circ)$. Рассмотрим набор $\tilde{\beta}$ такой, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ есть r -ребро (т.е. $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соседние по переменной x_r), причем r -я координата набора $\tilde{\beta}$ равна μ . Так как $\tilde{\alpha} \in T$, то по принятому условию имеем $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$. Нетрудно видеть, что имеет место $\varphi_\circ(\tilde{\beta}) = \varphi^*(\tilde{\beta}) = \varphi^*(\tilde{\alpha})$. Получаем $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = f(\varphi_\circ(\tilde{\beta})) = f(\varphi^*(\tilde{\alpha})) \neq f(\tilde{\alpha})$, что противоречиво.

Итак, для любого теста $T \in \mathcal{M}(f, S^k)$ есть множество номеров $N^\circ \subseteq N_n$ такое, что $|N^\circ| \geq n - (p_0 + 1)$ и для любого $i \in N^\circ$ существуют $\nu \in E_k$ и набор $\tilde{\alpha} \in T$, для которых выполнено $\tilde{\alpha} \in R_\nu(i, f)$.

Из алгоритма построения тупикового теста, приведенного в доказательстве предложения 6, следует, что у функции f существует тест $T_\circ \in \mathcal{M}(f, S^k)$ такой, что $|T_\circ| \leq n - (p_0 + 1)$.

Рассмотрим такое множество $B = \{\beta_i : i \in N^\circ\}$ наборов из E_k^n , что для каждого $i \in N^\circ$ существует набор $\tilde{\alpha}_i \in T_\circ$, для которого имеет место $(\tilde{\alpha}_i, \beta_i) \in R(i, f)$.

Обозначим через A такое подмножество E_k^n , что $|A| \leq 2(p_0 + 1)$ и для каждого $j \in N_n \setminus N^\circ$, если $R(j, f) \neq \emptyset$, то в A есть два набора, составляющие существенное j -ребро для функции f .

Положим $T(f) = T_\circ \cup B \cup A$. Из предложения 2 получаем $T(f) \in \mathcal{M}(f, C^k)$. Из того, что $T_\circ \in T(f)$, следует $T(f) \in \mathcal{M}(f, S^k \cup C^k)$. Нетрудно видеть, что $|T(f)| \leq 2n$.

Таким образом, для любой функции f существует тест $T(f) \in \mathcal{M}(f, C^k \cup S^k)$ такой, что $|T(f)| \leq 2n$. Следовательно, $L(f, C^k \cup S^k) \leq 2n$.

Так как для любой $f \in P_k^n$ имеет место $L(f, C^k) \leq L(f, C^k \cup S^k)$, то получаем $L(n, C^k) \leq L(n, C^k \cup S^k) \leq 2n$.

Предложение доказано. \square

Из предложений 14 и 15 вытекает следующее утверждение.

Предложение 16. Для любого $n \geq 2$ имеет место

$$L(n, C^2) \leq L(n, C^2 \cup S^2 \cup F_{in}^2(1)) \leq 2n.$$

Предложение 17. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, C^2) \leq L(n, C^2 \cup F_{in}^2) \leq 2n$.

Доказательство. Для $f \in B_2^n$ по теореме 7 существует тест $T_{in} \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ такой, что $|T_{in}| \leq n$.

Нетрудно видеть, что для теста T_{in} , как и для любого другого теста из $\mathcal{M}(f, F_{in}^2)$, для любого $i \in N_n$ существует $\nu \in E_2$ такое, что $R_\nu(i, f) \cap T_{in} \neq \emptyset$. В противном случае, так как $T_{in} \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$, то функция f была бы для некоторого $i \in N_n$ инвариантной

относительно неисправности $\varphi_{\tilde{e}_i} \in F_{in}^2(1) \subseteq B_{in}^2$. Последнее исключается в силу условия $f \in B_2^n$.

Пусть $A \subseteq E_k^n$, $|A| \leq n$ и для каждого $i \in N_n$ существуют два набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соответственно из T_{in} и A , для которых выполнено $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R(i, f)$.

Из предложения 2 следует, что множество $T_{in} \cup A$ является тестом из $\mathcal{M}(f, C^2)$. Следовательно, $T_{in} \cup A \in \mathcal{M}(f, C^2 \cup F_{in}^2)$. Так как $|T_{in} \cup A| \leq 2n$, то для любой функции $f \in B_2^n$ получаем $L(f, C^2 \cup F_{in}^2) \leq 2n$. Нетрудно видеть, что последнее неравенство будет выполняться также и для любой функции из P_2^n . Откуда следует, что для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, C^2) \leq L(n, C^2 \cup F_{in}^2) \leq 2n$. Предложение доказано. \square

Предложение 18. Для любого $n \geq 2$ имеет место $n - 1 \leq L(n, S^2 \cup F_{in}^2(1)) \leq n$.

Доказательство. Для f из P_2^n было установлено, что существует тест $T_{st} \in \mathcal{M}(f, S^2)$ такой, что $|T_{st}| \leq n$ и, если $|T_{st}| \leq n - l$, то для некоторого подмножества номеров $N^\circ \in N_n$, $|N^\circ| \geq n - l$, справедливо: для любого $i \in N^\circ$ существует $\nu \in E_2$ такое, что $R_\nu(i, f) \cap T_{st} \neq \emptyset$.

Рассмотрим подмножество $A \subseteq E_2^n$ такое, что $|A| \leq l$ и если для $i \in N_n \setminus N^\circ$ выполнено $R(i, f) \neq \emptyset$, то существует $\nu \in E_2$ такое, что $A \cap R_\nu(i, f) \neq \emptyset$.

Очевидно, что $T_{st} \cup A \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2(1))$ и $|T_{st} \cup A| \leq n$. Следовательно, для любой функции $f \in P_2^n$ имеет место $L(f, S^2 \cup F_{in}^2(1)) \leq n$.

Получаем $n - 1 = L(n, S^2) \leq L(n, S^2 \cup F_{in}^2(1)) \leq n$. Предложение доказано. \square

4.2. Инвариантность функций относительно неисправностей

Как было определено в предыдущем параграфе, функция $f \in P_k^n$ называется инвариантной относительно неисправности φ , если для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_k^n$ имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))$. В противном случае функцию f назовем *чувствительной* к неисправности φ .

Будем говорить, что функция $f \in P_k^n$ *инвариантна (чувствительна) относительно класса неисправностей F* , если она инвариантна (чувствительна) относительно каждой неисправности из F .

Говорят, что некоторое свойство выполнено для почти всех функций из P_k^n , если доля функций из P_k^n , для которых оно не выполнено, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Для каждого из классов C^k , S^k и F_{in}^2 проанализируем некоторые вопросы, связанные с инвариантностью функций относительно неисправностей из данного класса.

Предложение 19. Функция $f \in P_k^n$ инвариантна относительно неисправностей $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^k$ тогда и только тогда, когда f не зависит существенно от каждой из $p(\varphi_{\tilde{\gamma}})$ переменных из множества $\{x_i \in X^n : \gamma_i \in E_k\}$, где $p(\varphi_{\tilde{\gamma}})$ кратность неисправности $\varphi_{\tilde{\gamma}}$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Доказательство. Если константы подставить вместо несущественных переменных, то получившаяся подфункция будет равна исходной функции. Если же подставить константу вместо существенной переменной, то получившаяся подфункция будет отличаться от исходной функции. Что и требовалось доказать. \square

Предложение 20. При $n \rightarrow \infty$ почти все функции из P_k^n являются чувствительными к классу C^k .

Доказательство. Оценим долю функций, инвариантных относительно хотя бы одной неисправности из C^k . По предложению 19, если $f \in P_k^n$ инвариантна относительно какой-нибудь неисправности из C^k , то $f \notin B_k^n$, т.е. она не зависит существенно хотя бы от одной переменной из X^n . Следовательно, количество функций, инвариантных относительно неисправности $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^k$, не больше, чем $k^{k^{n-1}}$. Умножим эту величину на мощность класса C^k , которая равна $(k+1)^n - 1$, так как с каждой $\varphi_{\tilde{\gamma}} \in C^k$ однозначно связан набор $\tilde{\gamma} \in E_{k+1}^n \setminus (k, k, \dots, k)$ и, следовательно, $|C^k| = |E_{k+1}^n| - 1$. Получим $((k+1)^n - 1) \cdot k^{k^{n-1}}$. Доля функций из P_k^n , инвариантных относительно хотя бы одной неисправности из C^k , не превосходит величины $((k+1)^n - 1) \cdot k^{k^{n-1}} \cdot k^{-kn}$, что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. \square

Нетрудно видеть, что множество всех функций из P_k^n , инвариантных относительно класса C^k , совпадает с множеством всех констант из P_k^n .

Легко видеть, что справедливо утверждение.

Предложение 21. Функция $f \in P_k^n$ инвариантна относительно неисправности $\varphi \in S^k$ тогда и только тогда, когда существует функция $g \in P_k^{n-p(\varphi)}$ такая, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv g(\max Z_1(\varphi), \dots, \max(Z_{n-p(\varphi)}(\varphi))),$$

где $p(\varphi)$ — кратность неисправности φ , а $Z_i(\varphi)$ — множество переменных из разбиения $D(\varphi)$.

Предложение 22. При $n \rightarrow \infty$ почти все функции из P_k^n являются чувствительными к классу S^k .

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что количество функций, инвариантных относительно любой одной неисправности, не превышает $k^{k^{n-1}}$. Нетрудно видеть, что количество неисправностей в классе S^k меньше, чем n^n . Следовательно, доля функций из P_k^n , инвариантных относительно хотя бы одной неисправности из S^k , не больше, чем $n^n \cdot k^{k^{n-1}} \cdot k^{-k^n}$, а эта величина стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. \square

Предложение 23. Если функция $f \in P_k^n$ инвариантна относительно неисправности $\varphi \in S^k$, то она инвариантна относительно любой неисправности $\varphi' \in S^k$ такой, что $\varphi' < \varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S^k$ и $D(\varphi) = \{Z_1(\varphi), \dots, Z_{q_\varphi}(\varphi)\}$, где $q_\varphi = n - p(\varphi)$.

Доказательство проведем по индукции относительно значения q_φ .

В случае, когда $q_\varphi = n - 1$, каждая φ' такая, что $\varphi' < \varphi$ и $|D(\varphi')| = n$ есть тождественное преобразование, относительно которого, очевидно, инвариантна любая функция $f \in P_k^n$.

Пусть $q_\varphi < n - 1$, а для неисправности $\varphi' \in S^k$ имеем $q_{\varphi'} = q_\varphi + 1$. Покажем, что f инвариантна относительно φ' .

Пусть $\tilde{\beta}$ такой набор из E_k^n , что $f(\tilde{\beta}) \neq f(\varphi'(\tilde{\beta}))$. Имеем $f(\tilde{\beta}) = f(\varphi(\tilde{\beta}))$. Получим $f(\varphi(\tilde{\beta})) \neq f(\varphi'(\tilde{\beta}))$. Так как $\varphi' < \varphi$, то $\varphi = \varphi \cdot \varphi'$ и, следовательно, $f(\varphi'(\tilde{\beta})) \neq f(\varphi(\varphi'(\tilde{\beta})))$. Последнее означает, что f чувствительна к неисправности φ . Противоречие доказывает предложение. \square

Рассмотрим класс неисправностей F_{in}^2 и линейное пространство In .

Предложение 24. Если булева функция инвариантна относительно $F \subseteq F_{in}^2$, то она инвариантна относительно подпространства пространства In , натянутого на F .

Доказательство. Покажем, что если f из P_2^n инвариантна относительно неисправностей $\varphi_{\tilde{\sigma}_1}, \varphi_{\tilde{\sigma}_2} \in F_{in}^2$, то она инвариантна относительно неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}_1 \oplus \tilde{\sigma}_2} = \varphi_{\tilde{\sigma}_1} \oplus \varphi_{\tilde{\sigma}_2}$.

Пусть $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ и $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\varphi_{\tilde{\sigma}_1 \oplus \tilde{\sigma}_2}(\tilde{\alpha}))$. Так как f инвариантна относительно $\varphi_{\tilde{\sigma}_1}$, то имеем $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\alpha}))$. Следовательно,

$$f(\varphi_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\alpha})) \neq f(\varphi_{\tilde{\sigma}_1 \oplus \tilde{\sigma}_2}(\tilde{\alpha})) = f(\varphi_{\tilde{\sigma}_2}(\varphi_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\alpha}))).$$

Значит, f чувствительна к неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}_2}$. Противоречие доказывает предложение. \square

Нетрудно видеть, что множество всех функций из P_2^n , инвариантных относительно класса F_{in}^2 , совпадает с множеством всех констант из P_2^n .

Обозначим через $\mathcal{H}(f)$ множество всех неисправностей из In , относительно которых f инвариантна. Из предложения 24 следует, что $\mathcal{H}(f)$ образует подпространство линейного пространства In .

Предложение 25. Для $f \in P_2^n$ размерность пространства $\mathcal{H}(f)$ равна r тогда и только тогда, когда существует функция $g(y_1, \dots, y_{n-r}) \in B_2^{n-r}$ такая, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv g(\alpha_1^1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n^1 x_n, \dots, \alpha_1^{n-r} x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n^{n-r} x_n)$$

и матрица $\|\alpha_j^i\|$, $i \in N_{n-r}$, $j \in N_n$, $\alpha_j^i \in E_2$ имеет ранг $n - r$.

Доказательство. Рассмотрим базис подпространства $\mathcal{H}(f)$. Дополним его до базиса пространства. Линейный оператор перехода от полученного базиса к базису $\{\varphi_{\bar{e}_1}, \dots, \varphi_{\bar{e}_n}\}$ определяет матрицу $\|\alpha_j^i\|$, описанную в предложении. Утверждение доказано. \square

Предложение 26. При $n \rightarrow \infty$ почти все функции из P_2^n являются чувствительными к классу F_{in}^2 .

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что количество функций, инвариантных относительно любой одной неисправности из F_{in}^2 , не больше $2^{2^{n-1}}$. Мощность класса F_{in}^2 равна $2^n - 1$. Значит, доля функций из P_2^n , инвариантных относительно хотя бы одной неисправности из F_{in}^2 , не больше $(2^n - 1) \cdot 2^{2^{n-1}} \cdot 2^{-2^n}$, а эта величина стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. \square

Часть II

СЛОЖНОСТЬ КОНТРОЛЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ ТИПА ПОСТА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В этой части исследуется поведение функций Шеннона $L_K(n, C^2) = L_K(n)$ для класса функций алгебры логики K по отношению к константным неисправностям C^2 . Особое внимание уделяется случаю почти всех функций из заданного класса.

В качестве классов K выступают классы Поста. Они были открыты им в 1921 г. [77] и представляют собой результат классификации подмножеств функций из P_2 по свойству итеративной замкнутости.

Для каждого из классов Поста явно указано поведение соответствующей функции Шеннона для почти всех функций из этого класса.

Все результаты оригинальны, обобщают ранее известные продвижения в этом направлении.

Определим и напомним ряд понятий, необходимых для изложения основных результатов.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, $E_2^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in E_2, i = 1, \dots, n\}$ и $f : E_2^n \rightarrow E_2$. Два набора из E_2^n называются *соседними*, если они отличаются точно в одной компоненте. Множество E_2^n рассматривается также как единичный n -мерный куб, т. е. граф, вершинами которого являются наборы из E_2^n , а ребра соединяют соседние наборы. Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящую от n переменных. Пусть множество $T(f) \subseteq E_2^n$; говорим, что $T(f)$ — *проверяющий тест* функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если для любой функции $\psi(x_1, \dots, x_n)$, полученной из функции f заменой некоторой ее переменной константами 0 и 1, существует набор $(u_1, \dots, u_n) \in T(f)$ такой, что выполняется $f(u_1, \dots, u_n) \neq \psi(u_1, \dots, u_n)$. Мощность множества $T(f)$ называется *сложностью* проверяющего теста и обозначается $L(T(f))$. Тест, имеющий наименьшую сложность, называется *минимальным*, его сложность обозначается $L(f)$. Введем функцию

$$L_K(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n) \in K} L(f),$$

где K — некоторое множество функций алгебры логики, а максимум берется по всем функциям множества K , существенно зависящим от n переменных. Говорят, что некоторое утверждение выполняется для почти всех функций из множества K , если отношение числа функций, существенно зависящих от n переменных из множества K , для которых данное утверждение не выполняется, к числу всех функций из K , существенно зависящих от n переменных, стремится к нулю

при $n \rightarrow \infty$. Функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ таких, что $\alpha_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n$, имеет место соотношение

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *линейной*, если имеет место соотношение:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n, \quad c_i \in E_2, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Говорят, что функция *удовлетворяет условию* $\langle a^\mu \rangle$, $\mu \geq 2$, если любые μ наборов, на которых функция обращается в нуль, имеют общую нулевую компоненту; функция *удовлетворяет условию* $\langle a^\infty \rangle$, если все наборы, на которых функция равна нулю, имеют общую нулевую компоненту. Говорят, что функция *удовлетворяет условию* $\langle A^\mu \rangle$, $\mu \geq 2$, если любые μ наборов, на которых функция обращается в единицу, имеют общую единичную компоненту; функция *удовлетворяет условию* $\langle A^\infty \rangle$, если все наборы, на которых функция равна единице, имеют общую единичную компоненту. *Логические суммы* — это функции вида $\bigvee_{i=1}^n x_i, n = 1, 2, \dots$; *логические произведения* — функции вида $\&_{i=1}^n x_i, n = 1, 2, \dots$; функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется α -*функцией*, если $f(x, \dots, x) = x$, β -*функцией*, если $f(x, \dots, x) = 1$ и γ -*функцией*, если $f(x, \dots, x) = 0$. Рассматривались все классы Поста, в которых для любого n имеются функции, существенно зависящие от n переменных; в соответствии с [70] они имеют обозначения:

$$S_i, i \in \{1, 3, 5, 6\}, \quad P_i, i \in \{1, 3, 5, 6\}, \quad L_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$D_i, i \in \{1, 2, 3\}, \quad M_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad C_i, i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$F_i^\infty, F_i^\mu, i \in \{1, \dots, 8\}, \mu = 2, 3, \dots .$$

Будем называть их соответственно классами типов S, P, L, D, M, C, F . Опишем эти классы.

C_1 — содержит все функции алгебры логики;

C_2 — все α - и β -функции;

C_3 — все α - и γ -функции;

C_4 — все α -функции;

M_1 — все монотонные функции;

M_2 — все монотонные α - и β -функции;

M_3 — все монотонные α - и γ -функции;

- M_4 — все монотонные α -функции;
 D_3 — все самодвойственные функции;
 D_1 — все самодвойственные α -функции;
 D_2 — все самодвойственные монотонные функции;
 F_1^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все α -функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\mu \rangle$;
 F_2^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\mu \rangle$;
 F_3^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\mu \rangle$;
 F_4^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\mu \rangle$;
 F_5^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все α -функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$;
 F_6^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$;
 F_7^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$;
 F_8^μ ($\mu = 2, 3, \dots$) — все функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$;
 F_1^∞ — все α -функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\infty \rangle$;
 F_2^∞ — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\infty \rangle$;
 F_3^∞ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\infty \rangle$;
 F_4^∞ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\infty \rangle$;
 F_5^∞ — все α -функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\infty \rangle$;
 F_6^∞ — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\infty \rangle$;
 F_7^∞ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\infty \rangle$;
 F_8^∞ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\infty \rangle$;
 L_1 — все линейные функции;
 L_2 — все линейные α - и β -функции;
 L_3 — все линейные α - и γ -функции;
 L_4 — все линейные α -функции;
 L_5 — все линейные самодвойственные функции;
 S_1 — все логические суммы;
 S_3 — все логические суммы и все функции, равные 1;
 S_5 — все логические суммы и все функции, равные 0;
 S_6 — все логические суммы и все функции, равные 0 или 1;
 P_1 — все логические произведения;
 P_3 — все логические произведения и все функции, равные 1;
 P_5 — все логические произведения и все функции, равные 0;
 P_6 — все логические произведения и все функции, равные 0 или 1.

Классификация Поста изображена на рис. 5.1.

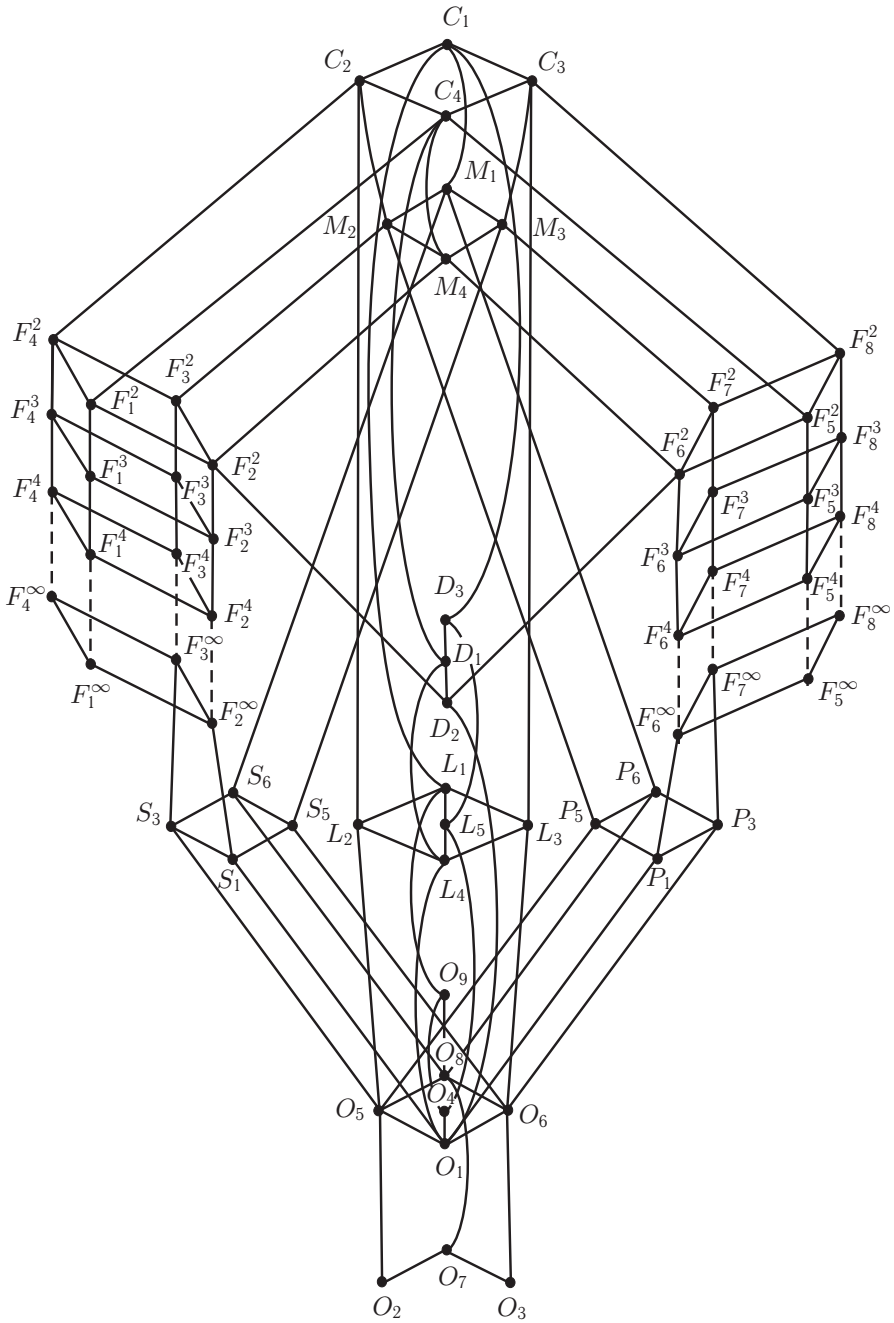


Рис. 5. Диаграмма Поста

Перейдем теперь к описанию основных результатов.

В гл. 5 для всех рассмотренных выше классов K Поста изучалось поведение функций $L_K(n)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Имеют место соотношения:*

- 1) $L_K(n) = 2$ для каждого класса K типа L ;
- 2) $L_K(n) = n + 1$ для каждого класса K типа S или P ;
- 3) $L_K(n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого класса K типа D, M, C или F .

В гл. 6 оценивается значение величины $L(f)$ для почти всех функций f из каждого класса Поста K . Получены следующие результаты.

Теорема 10. *Для почти всех функций f из следующих классов K имеют место соотношения:*

- 1) $L(f) = 2$ для каждого класса K типа L ;
- 2) $L(f) = n + 1$ для каждого класса K типа S или P ;
- 3) $L(f) = 4$ при n — четном, $L(f) \in \{4, 6\}$ при n — нечетном для класса D_2 ;
- 4) $L(f) \in \{2, 3, 4\}$ для классов $K \in \{D_1, D_3\}$;
- 5) $L(f) = 4$ для каждого класса K типа M ;
- 6) $L(f) = 3$ для каждого класса K типа C [46];
- 7) $L(f) \in \{4, 5\}$ для классов

$$K \in \{F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu, \mu = 3, 4, \dots\};$$

- 8) $3 \leq L(f) \leq 8$ для классов $K \in \{F_1^2, F_4^2, F_5^2, F_8^2\}$;
- 9) $L(f) = 5$ для классов

$$K \in \{F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu, \mu = 3, 4, \dots\};$$

- 10) $L(f) = 4$ при n — нечетном, $L(f) = 5$ при n — четном для классов $K \in \{F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2\}$.

Глава 7 посвящена вопросу о возможных значениях величины $L(f)$ для функций f из различных классов Поста. Получены следующие результаты.

Теорема 11. *Справедливы утверждения:*

- 1) $L(f) = 2$ для любой функции f , существенно зависящей от n переменных, из классов типа L ;
- 2) $L(f) = n + 1$ для любой функции f , существенно зависящей от n переменных, из классов типа S или P ;

3) пусть

- $t(n) = 2n - 4(p + 1)$ при $2^p + 2p < n \leq 2^{p+1} + 2(p + 1)$, $p \in \mathbb{N}$;

- $c_K = 2$ для каждого класса K типа C и классов D_1, D_3 ;

- $c_K = 3$ для каждого класса

$$K \in \{F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu, \mu = 2, 3, \dots\};$$

- $c_K = 4$ для каждого класса K типа M, D_2 и классов

$$K \in \{F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2, F_2^3, F_3^3, F_6^3, F_7^3\};$$

- $c_K = 5$ для каждого класса

$$K \in \{F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu, \mu = 4, 5, \dots\},$$

тогда для любых натуральных n и r таких, что $c_K \leq r \leq t(n)$, существует функция $f \in K$, существенно зависящая от n переменных, для которой $L(f) = r$, причем значение r для класса D_2 может быть только четным числом.

В гл. 8 предлагаются алгоритмы синтеза минимальных проверяющих тестов, опирающиеся на доказательства изложенных результатов.

Заключение содержит результаты, представленные в виде обобщающей таблицы. Дан сравнительный анализ сложности контроля управляющих систем, соответствующих классам Поста, при этом выявлены количественные и качественные различия в решении поставленной задачи для различных классов.

Основные результаты этой части представлены в [18].

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ШЕННОНА ДЛЯ КЛАССОВ ПОСТА

5.1. Классы типов S , P и L

Лемма 33. Для каждого класса K типа S имеет место $L_K(n) = n + 1$.

Доказательство. Класс S_i для всех $i = 1, 3, 5, 6$ содержит единственную, с точностью до переименования переменных без отождествления, функцию, существенно зависящую от n переменных, и она имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i.$$

Неисправность вида $x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, проверяется только одним набором: $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -м месте. Все неисправности вида $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, проверяются набором $(0, 0, \dots, 0)$. Поэтому минимальный проверяющий тест для $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид:

$$T(f) = \{(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}.$$

$L_K(n) = L(f) = L(T(f)) = n + 1$ для каждого класса типа S . □

Замечание. Минимальные проверяющие тесты для двойственных функций имеют одинаковую сложность. (Тест двойственной функции состоит из наборов, противоположных наборам теста данной функции.) Следовательно, $L_K(n) = n + 1$ для каждого класса типа P .

Лемма 34. Для каждого класса K типа L имеет место

$$L_K(n) = 2.$$

Доказательство. Имеются только две линейные функции, существенно зависящие от переменных x_1, \dots, x_n , и они задаются так:

$$f_a(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus a, \quad a \in \{0, 1\}.$$

Минимальный проверяющий тест для них имеет вид

$$T(f_a) = \{(0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1)\},$$

тем самым $L_K(n) = L(f_a) = L(T(f_a)) = 2$ для каждого класса типа L . \square

5.2. Классы типов M и C

Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется *единицей (нулем)* функции f , если $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ (соответственно $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$). Говорят, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n)$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. Пишем $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < (\beta_1, \dots, \beta_n)$, если $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n)$ и существует такой номер $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\alpha_i < \beta_i$. Единица (нуль) функции f $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется *нижней единицей (верхним нулем)* f , если для любого $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) < (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, выполняется $f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$ (соответственно, для любого $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < (\beta_1, \dots, \beta_n)$, выполняется $f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 1$).

Отметим некоторые простые свойства проверяющих тестов монотонных функций.

Свойство 1. Если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ проверяет неисправность $x_i = 1$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) монотонной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то $\alpha_i = 0$, $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ и $f(\alpha_i, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = 1$.

Свойство 2. Если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ проверяет неисправность $x_i = 0$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) монотонной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то $\alpha_i = 1$, $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ и $f(\alpha_i, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = 0$.

Как следствие этих свойств получаем следующее свойство.

Свойство 3. Ни один набор не может одновременно проверять неисправности вида $x_i = 0$ и $x_j = 1$ монотонной функции.

Лемма 35. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — монотонная функция, $T(f)$ — проверяющий тест для f , то для f существует проверяющий тест $T'(f)$, состоящий только из нижних единиц и верхних нулей функции f , такой что $L(T'(f)) \leq L(T(f))$.

Доказательство. Предположим, что $T(f)$ содержит такой набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что $f(\alpha) = 1$ и α не является нижней единицей функции f . Пусть набор α проверяет неисправности $x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_m} = 0$. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — нижняя единица f , такая, что $\beta < \alpha$. Возьмем произвольное $j \in \{1, \dots, m\}$. Если $\beta_{i_j} = 0$, то так как $f(\beta) = 1$,

то и $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}, 0, \alpha_{i_j+1}, \dots, \alpha_n) = 1$, что противоречит свойству 2. Если $\beta_{i_j} = 1$ и $f(\beta_1, \dots, \beta_{i_j-1}, 0, \beta_{i_j+1}, \dots, \beta_n) = 1$, то β — не нижняя единица. Следовательно, $\beta_{i_j} = 1$ и $f(\beta_1, \dots, \beta_{i_j-1}, 0, \beta_{i_j+1}, \dots, \beta_n) = 0$. Следовательно, набор β также проверяет все неисправности $x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_m} = 0$, и в тесте $T(f)$ набор α можно заменить на β . Так же поступаем со всеми остальными наборами из $T(f)$, не являющимися нижними единицами функции. Аналогично действуем с наборами, не являющимися верхними нулями и получаем требуемый тест, состоящий только из нижних единиц и верхних нулей. \square

Следствие. Для любой монотонной функции существует минимальный проверяющий тест, состоящий только из нижних единиц и верхних нулей функции.

Лемма 36. Для некоторой последовательности монотонных функций $f_n(x_1, \dots, x_n)$ имеет место $L(f_n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство.

1). Пусть сначала $n = 2^p + 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрим табл. 5.1, состоящую из $2^p + p$ булевых наборов длины $2^p + 2p$.

Таблица 5.1

1	2	...	2^p	$2^p + 1$...	$2^p + p$	$2^p + p + 1$...	$2^p + 2p$
1	0	...	0	0					
0	1	0	...	0					
.							
0	...	0	1	0					
0	0	...	0	1					
0	0	...	0	0	1	0	0	...	0
0	0	...	0	0	0	...	0	...	0
.	
0	0	...	0	0	0	...	0	1	0
0	0	...	0	0	0	...	0	0	1

В табл. 5.1 первая строка содержит номера столбцов. Блок K состоит из 2^p булевых наборов длины p . Блок \bar{K} — из противоположных им наборов, т.е. если некоторая строка блока K имеет вид $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, то соответствующая строка блока \bar{K} имеет вид $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$. Все данные наборы попарно несравнимы, следовательно, они могут рассматриваться как совокупность нижних единиц некоторой монотонной функции. Рассмотрим монотонную функцию f_n , зависящую

от $n = 2^p + 2p$ переменных, для которых данные наборы являются нижними единицами (т.е. на всех наборах, больших или равных некоторому набору из табл. 5.1, функция принимает значение 1, а на остальных наборах — 0).

Согласно следствию существует минимальный проверяющий тест для монотонной функции, образованный некоторыми нижними единицами и верхними нулями. Найдем множество верхних нулей рассматриваемой функции f_n . Легко видеть, что не существует верхнего нуля f_n , сравнимого с какой-либо нижней единицей. Следовательно, элементы множества, состоящего из всех нижних единиц и верхних нулей f_n , попарно несравнимы.

Рассмотрим табл. 5.2, состоящую из $2^p + p2^{p-1}$ векторов длины $2^p + 2p$. В ней, как и ранее, первая строка содержит номера столбцов.

Таблица 5.2

1	2	...	2^p	$2^p + 1$...	$2^p + p$	$2^p + p + 1$...	$2^p + 2p$
0	1	...	1	1					
1	0	1	...	1					
⋮		...							
1	...	1	0	1					
1	1	...	1	0					
1		...	1	0	0	...	0	0	1
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				0	γ_2	...	γ_p	0	$\bar{\gamma}_p$
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				0	1	...	1	0	0
⋮				0	0	0	...	0	1
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮	1			γ_1	0	γ_3	...	γ_p	$\bar{\gamma}_p$
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				1	0	1	...	1	0
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
1	...		1	1	1	...	1	0	0
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				γ_1	γ_2	...	γ_{p-1}	0	$\bar{\gamma}_1$
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	$\bar{\gamma}_2$
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	$\bar{\gamma}_{p-1}$
⋮				⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
1			1	1	1	...	1	0	0

Выделенная часть таблицы содержит всевозможные наборы $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2p})$ такие, что одна пара компонент γ_i, γ_{p+i} — нулевая:

$\gamma_i = \gamma_{p+i} = 0$ ($i = 1, \dots, p$), а остальные подобные пары состоят из противоположных компонент: $\gamma_j = \bar{\gamma}_{p+j}$, $j \neq i$.

Наборы из двух приведенных таблиц попарно несравнимы. Следовательно, на всех наборах из табл. 5.2 функция f_n равна 0. Нетрудно видеть, что наборы из табл. 5.2 являются верхними нулями f_n . Других наборов, попарно несравнимых с наборами из табл. 5.1 и табл. 5.2 нет. Действительно, рассмотрим произвольный набор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{2p+2p})$; если существует k такое, что $\beta_{2p+k} = \beta_{2p+p+k}$, $k \in \{1, \dots, p\}$, то β сравним с некоторым набором из последних p нижних единиц в табл. 5.1 или последних $p \cdot 2^{p-1}$ верхних нулей в табл. 5.2. Если все же p последних пар компонент β противоположны, то найдутся нижняя единица и верхний нуль с точно такими же последними $2p$ компонентами и β будет сравним с одним из них. Следовательно, табл. 5.2 включает все верхние нули f_n .

Чтобы наборы образовывали проверяющий тест, необходимо, чтобы совокупность нижних единиц этих наборов содержала хотя бы одну 1 в каждом разряде, а совокупность верхних нулей — хотя бы один 0. Следовательно, минимальный проверяющий тест для f_n будет состоять из 2^p первых в табл. 5.1 нижних единиц и 2^p первых в табл. 5.2 верхних нулей:

$$L(f_n) = 2^p + 2^p = 2^{p+1}, \quad n = 2^p + 2p, \quad p \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(f_n)}{2n} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^{p+1}}{2(2^p + 2p)} = 1.$$

Следовательно, при $n = 2^p + 2p$ $L(f_n) \sim 2n$ при $p \rightarrow \infty$.

2). Пусть теперь $2^p + 2p < n < 2^{p+1} + 2(p+1)$, $p \in \mathbb{N}$, т. е.

$$n = 2^{p+1} + 2(p+1) - t, \quad \text{где } 0 < t < 2^p + 2.$$

Рассмотрим таблицу нижних единиц построенной в пункте 1 монотонной функции f_n для $n = 2^{p+1} + 2(p+1)$ (см. табл. 5.3). Отбросим первые t наборов и первые t компонент оставшихся наборов. Получилась табл. 5.3' (выделена в табл. 5.3) размером $(2^{p+1} + 2(p+1) - t) \times (2^{p+1} + p + 1 - t)$.

Рассмотрим монотонную функцию f_n^* , зависящую от $n = 2^{p+1} + 2(p+1) - t$ переменных, для которой $2^{p+1} + p + 1 - t$ наборов из табл. 5.3' являются нижними единицами. Найдем множество верхних нулей f_n^* . Это будут наборы из табл. 5.4.

Выделенная часть таблицы содержит всевозможные наборы $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2(p+1)})$ такие, что одна пара компонент γ_i, γ_{p+1+i} — нулевая, а остальные подобные пары состоят из противоположных компонент и эти наборы не покрываются первыми t наборами.

Таблица 5.3

1 2 ... t	$t+1$... 2^{p+1}	... $2^{p+1} + p + 1$... $2^{p+1} + 2(p+1)$
1 0 ... 0 0 0 1 0 0 ... 0 1	0 ... 0 0 ... 0	$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ α_{p+1}	$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots$ $\bar{\alpha}_{p+1}$
0 ... 0 0 ... 0	1 0 ... 0 0 0 1 0 0 ... 0 1	1 1 ... 0 1 1 ... 1	0 0 ... 1 0 0 ... 0
0 ... 0 0 ... 0	0 ... 0 0 ... 0	1 0 ... 0 0 0 1 0 0 ... 1 0 0 0 ... 0 1	1 0 ... 0 0 0 1 0 0 ... 1 0 0 0 ... 0 1

Таблица 5.4

1 2 ... $2^{p+1}-t$... $2^{p+1} + p + 1 - t$... $2^{p+1} + 2(p+1) - t$
1 1 ... 1 1 1 ... 1	$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ α_{p+1}	$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots$ $\bar{\alpha}_{p+1}$
0 1 ... 1 1 1 0 1 1 ... 1 0	1 1 ... 0 1 1 ... 1	0 0 ... 1 0 0 ... 0
1 1 ... 1 1 1 ... 1	$\gamma_1, \gamma_2, \dots$ γ_{p+1}	$\bar{\gamma}_{p+2}, \dots$ $\bar{\gamma}_{2(p+1)}$

Наборы из табл. 5.3' и табл. 5.4 попарно несравнимы. Аналогично пункту 1 проверяется, что других наборов, попарно несравнимых со всеми наборами из табл. 5.3' и табл. 5.4, нет. Следовательно, табл. 5.4 содержит все верхние нули f_n^* . Минимальный проверяющий тест для f_n^* будет состоять из $2^{p+1} - t$ первых в табл. 5.3 нижних единиц и $2^{p+1} - t$ верхних нулей из табл. 5.4, которые имеют нули в первых $2^{p+1} - t$ разрядах. Следовательно,

$$L(f_n^*) = 2(2^{p+1} - t), \quad 0 < t < 2^p + 2, \quad n = 2^{p+1} + 2(p+1) - t, \quad p \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(f_n^*)}{2n} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2(2^{p+1} - t)}{2(2^{p+1} + 2(p+1) - t)} = \\ &= 1 - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{4(p+1)}{2(2^{p+1} + 2(p+1) - t)} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $L(f_n^*) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана. \square

Замечание. Из структуры вложений замкнутых классов Поста следует, что построенное семейство монотонных функций содержится во всех классах типов M и C .

5.3. Классы типа F

Рассмотрим F_2^∞ — класс всех монотонных α -функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty \rangle$.

Лемма 37. Для некоторой последовательности функций $f_n(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 4$, из F_2^∞ имеет место $L(f_n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Фиксируем произвольное n , $n \geq 4$. Рассмотрим функцию, заданную следующим образом:

$$\begin{cases} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \equiv 1, \\ f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = f_{n-1}^*(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases}$$

где $f_{n-1}^*(x_1, \dots, x_{n-1})$ — построенная в лемме 36 монотонная функция. Очевидно, $f_n \in F_2^\infty$.

Установим, что $L(f_n) = L(f_{n-1}^*) + 1$. Пусть

$$T_M(f_{n-1}^*) = \{(u_{i,1}, \dots, u_{i,n-1}), i \in I\}$$

— минимальный проверяющий тест для f_{n-1}^* , где I — некоторое множество индексов, тогда

$$T(f_n) = \{(u_{i,1}, \dots, u_{i,n-1}, 0), (0, 0, \dots, 0, 1), i \in I\}$$

— проверяющий тест для f_n . Следовательно,

$$L(f_n) \leq L(f_{n-1}^*) + 1. \quad (5.1)$$

Пусть $T_M(f_n) = \{(v_{i,1}, \dots, v_{i,n}), i \in I'\}$ — минимальный проверяющий тест для f_n , где I' — некоторое множество индексов. В $T_M(f_n)$ может входить только один набор с последней единичной компонентой, так как такие наборы могут проверять только одну неисправность $x_n = 0$. Следовательно, если у оставшихся наборов из $T_M(f_n)$ отбросить последнюю компоненту, получим проверяющий тест для f_{n-1}^* , таким образом

$$L(f_{n-1}^*) \leq L(f_n) - 1. \quad (5.2)$$

Из (5.1), (5.2) получаем

$$L(f_n) = L(f_{n-1}^*) + 1,$$

$$\frac{L(f_n)}{2n} = \frac{L(f_{n-1}^*) + 1}{2(n-1) + 2} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

□

Замечание. Из структуры вложений замкнутых классов Поста, а также в силу двойственности соответствующих классов, получаем, что все классы типа F содержат последовательность функций f_1, f_2, \dots такую, что $L(f_n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

5.4. Классы типа D

Лемма 38. *Функция*

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee \bar{x}_n \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$$

принадлежит D_2 тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in F_3^2$.

Доказательство. Достаточность.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in F_3^2$. Функция f — самодвойственная по заданию, $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ — монотонная, $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ — монотонная, так как функция, двойственная монотонной, является монотонной функцией. Осталось доказать монотонность функции по последней координате. Для наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ и $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ имеем

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) = \bar{\varphi}(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}),$$

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}).$$

Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1})$. Так как $\varphi(\alpha)$ удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$, то она не может иметь нулевые значения на противоположных наборах. Следовательно, или $\varphi(\bar{\alpha}) = 0$, $\varphi(\alpha) = 1$, или

$\varphi(\bar{\alpha}) = 1$, $\varphi(\alpha) = 1$, или $\varphi(\bar{\alpha}) = 1$, $\varphi(\alpha) = 0$, что равносильно $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}) \leq \leq \varphi(\alpha)$. Таким образом,

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \leq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1).$$

Достаточность доказана.

Необходимость.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in D_2$. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$, т. е.

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee \bar{x}_n \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}).$$

Так как $f(x_1, \dots, x_n)$ — монотонная, то и $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ — монотонная. Предположим, что $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ не удовлетворяет условию $\langle a^2 \rangle$. Тогда существуют два противоположных набора α и $\bar{\alpha}$ таких, что $\varphi(\alpha) = \varphi(\bar{\alpha}) = 0$. Но тогда $f(\alpha, 1) = \varphi(\alpha) = 0$ и $f(\alpha, 0) = \bar{\varphi}(\bar{\alpha}) = 1$, что противоречит монотонности функции f . \square

Рассмотрим класс всех самодвойственных монотонных функций D_2 .

Лемма 39. Для некоторой последовательности функций $f_n(x_1, \dots, x_n) \in D_2$, $n \geq 5$, имеет место $L(f_n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Фиксируем произвольное n , $n \geq 5$.

Пусть $\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ — построенная в лемме 37 функция из F_2^∞ :

$$\begin{cases} \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, 1) \equiv 1, \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, 0) = f_{n-2}^*(x_1, \dots, x_{n-2}), \end{cases}$$

где $f_{n-2}^*(x_1, \dots, x_{n-2})$ — построенная в лемме 36 монотонная функция. Тогда по лемме 38 функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee \bar{x}_n \bar{\varphi}_{n-1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$$

входит в D_2 .

Покажем, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ является нижней единицей или верхним нулем функции φ_{n-1} точно тогда, когда набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ является, соответственно, нижней единицей или верхним нулем для f_n . Возможны следующие случаи.

1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ — верхний нуль для φ_{n-1} , т. е. $\varphi_{n-1}(\alpha) = 0$, и для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ при $\beta > \alpha$ выполнено $\varphi_{n-1}(\beta) = 1$, что равносильно утверждению $f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = 0$, и для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ выполнено $(\beta, 1) > (\alpha, 1)$, следовательно, $f_n(\beta, 1) = 1$, что имеет место точно тогда, когда $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ — верхний нуль для f_n .

2.1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, 0)$ — нижняя единица для φ_{n-1} , т. е. $\varphi_{n-1}(\alpha) = 1$, и для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 0)$ при $\beta < \alpha$ выполнено $\varphi(\beta) = 0$, что равносильно утверждению $f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, 0, 1) = 1$, и для любого $\beta < \alpha$

$$f_n(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 0, 1) = \varphi_{n-1}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 0) = 0$$

и

$$f_n(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 0, 0) = \bar{\varphi}_{n-1}(\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{n-2}, 1) = \bar{1} = 0,$$

что имеет место точно тогда, когда $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, 0, 1)$ — нижняя единица для f_n .

2.2. Из задания функции следует, что функции f_n и φ_{n-1} имеют только по одной нижней единице, у которых последняя координата единичная, и эти нижние единицы имеют соответственно следующий вид: $(0, 0, \dots, 0, 1, 1)$ и $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Теперь рассмотрим функцию $\bar{\varphi}_{n-1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$. Это — монотонная функция, у которой нижними единицами являются наборы, противоположные верхним нулям функции φ_{n-1} , а верхними нулями — наборы, противоположные нижним единицам φ_{n-1} .

Аналогично устанавливается, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ является нижней единицей или верхним нулем $\bar{\varphi}_{n-1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ точно тогда, когда набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$ является соответственно нижней единицей или верхним нулем для $f_n(x_1, \dots, x_n)$.

Итак, нам известно множество верхних нулей и нижних единиц функции $f_n(x_1, \dots, x_n)$ из D_2 . Заметим, что для f_n любые две неисправности вида $x_i = 0$, $x_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, 2^{p+1}$, где $2^p + 2p < n - 2 \leq 2^{p+1} + 2(p + 1)$, не могут проверяться одним набором.

Минимальный тест $T_M(f_n)$ получается из минимального теста $T_M(\varphi_{n-1})$ путем добавления n -й единичной координаты каждому набору теста $T_M(\varphi_{n-1})$ и еще одного набора, проверяющего неисправность $x_n = 0$ (например, $(0, 0, \dots, 0, 1, 1)$). Таким образом,

$$L(f_n) = L(\varphi_{n-1}) + 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(f_n)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\varphi_{n-1}) + 1}{2(n-1) + 2} = 1.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Из структуры вложений классов Поста следует, что в каждом классе типа D имеется последовательность функций $\{f_n\}$ такая, что $L(f_n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

5.5. Оценки функций Шеннона для классов Поста

Расстоянием по Хэммингу между двумя наборами n -мерного булевого куба назовем число, равное количеству компонент, в которых эти наборы отличаются. Две вершины булевого куба назовем *соседними*, если они отличаются точно в одной компоненте, т.е. расстояние между ними равно 1. *Окрестностью радиуса r* вершины булевого куба $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ назовем множество вершин куба, находящихся на расстоянии по Хэммингу не более чем r от вершины $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Лемма 40. *Не существует функции $f_n \in C_1$, существенно зависящей от n переменных, для которой $L(f_n) = 2n$.*

Доказательство. При $L(f_n) = 2n$ необходимо, чтобы каждый набор минимального теста проверял только одну неисправность (всего имеется $2n$ неисправностей), т.е. необходимо, чтобы у каждой вершины E_2^n было не более одной соседней вершины, на которой функция f_n принимает противоположное значение.

Предположим противное, пусть существует $f_n(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящая от n переменных, такая, что $L(f_n) = 2n$. Пусть вершина $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ принадлежит минимальному тесту $T_M(f_n)$ и

$$f_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = a, \quad (5.3)$$

следовательно, существует i такое, что

$$f_n(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) = \bar{a}, \quad (5.4)$$

т.е. вершина $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ проверяет неисправность $x_i = \bar{\alpha}_i$. Если для некоторого $j \neq i$ выполнено $f_n(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) = \bar{a}$, то набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ проверяет неисправность $x_j = \bar{\alpha}_j$ и, значит, $L(f_n) < 2n$. Следовательно, для любого $j \neq i$ верно $f_n(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) = a$. Из (5.3), (5.4) следует, что $f_n(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_k, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) = \bar{a}$ для любого $k \neq i$. Таким образом мы получили, что на всех вершинах с координатой α_i , соседних с $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, функция f_n равна a , а на всех вершинах с координатой $\bar{\alpha}_i$, соседних с $(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$, функция f_n равна \bar{a} .

Для каждой вершины с координатой α_i из полученной окрестности радиуса 1 вершины $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ найдется вершина из окрестности радиуса 1 вершины $(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$, которая отличается от нее в одной координате. На этих вершинах функция f_n принимает противоположные значения. Следовательно, во всех вершинах из окрестности радиуса 2 вершины $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с координатой α_i функция f_n должна быть равна a , а на всех вершинах из окрестности радиуса 2 вершины $(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$ с координатой $\bar{\alpha}_i$ функция f_n должна быть равна \bar{a} . Далее рассматриваем окрестности этих вершин радиуса 3 и т.д. Получим, что на всех вершинах с координатой α_i функция f_n равна a ,

а на всех вершинах с координатой $\bar{\alpha}_i$ функция f_n равна $\bar{\alpha}$. Таким образом, функция f_n не зависит существенно от n переменных, что противоречит условию. Лемма доказана. \square

Теорема 9. *Имеют место соотношения:*

- 1) $L_K(n) = 2$ для каждого класса K типа L ;
- 2) $L_K(n) = n + 1$ для каждого класса K типов S или P ;
- 3) $L_K(n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого класса K типов D, M, C или F .

Доказательство. Согласно структуре включений классов Поста и леммам 36, 37 и 39 получаем, что в каждом классе K типов D, M, C и F существует некоторая последовательность функций $\{f_n\}$ такая, что $L(f_n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, для любого K выполняется $L(f_n) \leq L_K(n) < 2n$, что равносильно

$$\frac{L(f_n)}{2n} \leq \frac{L_K(n)}{2n} < 1,$$

т. е.

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(f_n)}{2n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_K(n)}{2n} \leq 1.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_K(n)}{2n} = 1$, что означает $L_K(n) \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

С учетом лемм 33 и 34 теорема доказана. \square

СЛОЖНОСТЬ МИНИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ ПОЧТИ ВСЕХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ПОСТА

6.1. Классы M_1, M_2, M_3, M_4

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — монотонная функция, заданная на n -мерном двоичном кубе E_2^n . Множество $E_2^{n,k} \subseteq E_2^n$ наборов булевого куба, содержащих k единиц, назовем k -м слоем булевого куба.

Лемма 41. Для любой монотонной функции f и любого проверяющего теста $T(f)$ выполняется $L(T(f)) \geq 4$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — монотонная функция, и существует $T(f)$ такой, что $L(T(f)) \leq 3$. Тогда согласно свойству 3 возможны только два случая.

1) Один набор проверяет все неисправности вида $x_i = 1, i = 1, \dots, n$, т.е. для функции f набор $(0, 0, \dots, 0)$ является верхним нулем. Существует только одна монотонная функция, для которой это возможно:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n,$$

но для нее $L(f) = n + 1$.

2) Один набор проверяет все неисправности вида $x_i = 0, i = 1, \dots, n$, т.е. для функции f набор $(1, 1, \dots, 1)$ является нижней единицей. Существует только одна монотонная функция, для которой это возможно:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n,$$

но для нее $L(f) = n + 1$. Следовательно, предположение неверно, и лемма доказана. \square

Если $A \subseteq E_2^{n,k}$, то множество $T(A) = \{\beta \in E_2^{n,k+1} : \exists \alpha \in A (\alpha < \beta)\}$ называется тенью множества A .

Лемма 42. Если $A \subseteq E_2^{n,k}, n \geq 1, k \leq n$, то

$$|T(A)| \geq |A|(n - k)/(k + 1).$$

Доказательство. Поскольку каждая вершина из $E_2^{n,k}$ смежна с $n - k$ вершинами из $E_2^{n,k+1}$, то число ребер в E_2^n , которые соединяют вершины множества A с вершинами из $T(A)$, равно $|A|(n - k)$. С другой стороны, каждая вершина из $T(A)$ смежна с $k + 1$ вершинами из $E_2^{n,k}$, но при этом некоторые вершины из $T(A)$ могут быть смежны как с вершинами из A , так и с вершинами из $E_2^{n,k} \setminus A$. Следовательно,

$$|A|(n - k) \leq |T(A)|(k + 1)$$

и

$$|T(A)| \geq |A|(n - k)/(k + 1).$$

□

Если $A \subseteq E_2^{n,k+1}$, то множество $P(A) = \{\alpha \in E_2^{n,k} : \exists \beta \in A (\alpha < \beta)\}$ называется *проекцией* множества A .

Лемма 43. Если $A \subseteq E_2^{n,k+1}$, $n \geq 1$, $k \leq n$, то

$$|P(A)| \geq |A|(k + 1)/(n - k).$$

Доказательство. Число ребер, соединяющих вершины множества A с вершинами из $P(A)$, равно $|A|(k + 1)$. С другой стороны каждая вершина из $P(A)$ смежна с $n - k$ вершинами из $E_2^{n,k+1}$, но при этом некоторые вершины из $P(A)$ могут быть смежны как с вершинами из A , так и с вершинами из $E_2^{n,k+1} \setminus A$. Поэтому

$$|A|(k + 1) \leq |P(A)|(n - k)$$

и

$$|P(A)| \geq |A|(k + 1)/(n - k).$$

□

Обозначим $M(n)$ — множество монотонных функций, зависящих от n переменных.

В работе [33, теорема 2] утверждается, что у почти всех функций из $M(n)$ при $n \rightarrow \infty$ содержится асимптотически $\frac{1}{2} C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ нижних единиц.

Это означает, что существует такая функция $\varphi(n) = o\left(C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, что если обозначить через $M_\varphi(n)$ множество, состоящее из функций из $M(n)$ таких, что функция содержит не менее чем $\frac{1}{2} C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \varphi(n)$ и не более чем $\frac{1}{2} C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \varphi(n)$ нижних единиц, то $|M_\varphi(n)| \sim \sim |M(n)|$ при $n \rightarrow \infty$.

Анализ верхних оценок начнем со случая, когда n — четно.

Далее всюду, пока не будет обговорено обратное, будем считать, что n — четно.

Обозначим $\theta(n) = n^2 C_n^{\frac{n}{2}-1} 2^{-\frac{n}{2}-1}$.

Обозначим через $M^1(n)$ множество монотонных функций из $M(n)$ таких, что все нижние единицы функции принадлежат слоям $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, причем в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ содержится не более чем $\theta(n)$ нижних единиц. В работе [33, лемма 14.1] утверждается, что $|M^1(n)| \sim |M(n)|$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим $M_\varphi^1(n) = M^1(n) \cap M_\varphi(n)$, $\xi(n) = \varphi(n) + 2\theta(n)$. Понятно, что $|M_\varphi^1(n)| \sim |M(n)|$ при $n \rightarrow \infty$, и у любой функции из $M_\varphi^1(n)$ в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ содержится не менее чем $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - \xi(n)$ и не более чем $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} + \xi(n)$ нижних единиц.

Если F — множество функций, то обозначим $F^* = \{f^* : f \in F\}$ — множество функций, двойственных к функциям из F .

Известно, что если $f \in M(n)$, то $f^* \in M(n)$ и у функции f^* верхними нулями являются наборы, противоположные нижним единицам f .

Обозначим $M_\varphi^0(n) = (M_\varphi^1(n))^*$. Понятно, что для любой функции $f \in M_\varphi^0(n)$ все верхние нули функции содержатся в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, причем в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ содержится не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - \xi(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} + \xi(n)$ верхних нулей. Обозначим $M_\varphi^{0,1}(n) = M_\varphi^1(n) \cap M_\varphi^0(n)$. Ясно, что $|M_\varphi^0(n)| \sim |M(n)|$ и $|M_\varphi^{0,1}(n)| \sim |M(n)|$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 44. *При четном n почти все функции из $M(n)$ имеют две противоположные нижние единицы.*

Доказательство. Покажем, что число функций $f \in M(n)$, не имеющих противоположных нижних единиц, бесконечно мало по сравнению с $M(n)$. Достаточно рассмотреть только функции из $M_\varphi^{0,1}(n)$.

Пусть $S(n) \subseteq M_\varphi^{0,1}(n)$ — множество функций, не имеющих противоположных нижних единиц. Докажем, что

$$\frac{|S(n)|}{|M(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in S(n)$. Обозначим $A(f)$ — множество нижних единиц f из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, $B(f)$ — множество верхних нулей f из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}}$. Поскольку $f \in M_\varphi^{0,1}(n)$, то

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - \xi(n) \leq |A(f)| \leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} + \xi(n),$$

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - \xi(n) \leq |B(f)| \leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} + \xi(n).$$

Выберем подмножества $A^*(f), B^*(f), A^*(f) \subseteq A(f), B^*(f) \subseteq B(f)$ такие, что для любого набора из $A^*(f)$ существует противоположный ему набор в $B^*(f)$ и, наоборот, для любого набора из $B^*(f)$ существует противоположный ему набор в $A^*(f)$. Тогда $|A^*(f)| = |B^*(f)|$.

Оценим величину $|A(f) \setminus A^*(f)|$. Наборы, противоположные наборам множества $A(f) \setminus A^*(f)$, не могут принадлежать $A(f)$, так как функция f не имеет противоположных нижних единиц, и не могут принадлежать $B(f)$ по построению $A^*(f)$. Следовательно, $|A(f) \setminus A^*(f)| \leq C_n^{\frac{n}{2}} - |A(f)| - |B(f)| \leq 2\xi(n)$ и

$$|B^*(f)| = |A^*(f)| = |A(f)| - |A(f) \setminus A^*(f)| \geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - 3\xi(n).$$

Далее каждой функции $f \in S(n)$ сопоставим функции $\psi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, |B^*(f)|$, получающиеся из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ путем замены какого-либо одного верхнего нуля f из множества $B^*(n)$ на единицу. Все функции ψ_i , $i = 1, \dots, |B^*(f)|$, будут монотонными, различными и для любого i выполнено $\psi_i \notin S(n)$, так как у них будет пара противоположных нижних единиц.

Обозначим $\Psi(n)$ — множество всех ψ_i , поставленных в соответствие всем функциям из множества $S(n)$. Посмотрим, сколько может быть прообразов у произвольной функции $\psi_i \in \Psi(n)$. Пусть ψ — некоторая функция из $\Psi(n)$. Сколько функций из множества $S(n)$ можно получить из ψ путем замены некоторой нижней единицы ψ на ноль? — Не более двух функций, соответствующих паре противоположных нижних единиц ψ . Таким образом, у каждой ψ из $\Psi(n)$ получим не более двух прообразов из $S(n)$. Следовательно,

$$|\Psi(n)| > \frac{|S(n)|p(n)}{2}, \quad \text{где } p(n) = \min_{f \in S(n)} |B^*(f)|.$$

Понятно, что $p(n) \geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - 3\xi(n)$. Имеем

$$\frac{|S(n)|}{|M(n)|} < \frac{|S(n)|}{|\Psi(n)|} < \frac{|S(n)|2}{|S(n)|p(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 45. При четном n почти все функции из $M(n)$ имеют два противоположных верхних нуля.

Доказательство. Достаточно рассматривать функции из $M_\varphi^{0,1}(n)$. Пусть $f \in M_\varphi^{0,1}(n)$. Если f имеет две противоположные нижние единицы, то функция $f^* \in M_\varphi^{0,1}(n)$ имеет два противоположных верхних

нуля. Так как почти все функции из $M_\varphi^{0,1}(n)$ имеют две противоположные нижние единицы, то почти все функции из $M_\varphi^{0,1}(n)$ имеют два противоположных верхних нуля. Лемма доказана. \square

Везде далее, пока не будет обговорено обратное, будем считать, что n — нечетное.

$$\text{Обозначим } \theta_1(n) = n^2 C_n^{\frac{n-3}{2}} 2^{-\frac{n+3}{2}}, \theta_2(n) = n^2 C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Обозначим через $M_1^1(n)$ множество функций из $M(n)$ таких, что для каждой функции из $M_1^1(n)$ все нижние единицы лежат в слоях $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, причем в слое $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$ содержится не более $\theta_1(n)$ нижних единиц, а в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ — не более $\theta_2(n)$ нижних единиц. Через $M_2^1(n)$ обозначим множество функций из $M(n)$ таких, что для каждой функции из $M_2^1(n)$ все нижние единицы лежат в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем в слое $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$ содержится не более $\theta_2(n)$ нижних единиц, а в слое $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ — не более $\theta_1(n)$ нижних единиц.

В работе [33, лемма 14.11] утверждается, что $|M_1^1(n)| \sim |M_2^1(n)| \sim \sim |M(n)|/2$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим $M^1(n) = M_1^1(n) \cup M_2^1(n)$, $M^0(n) = (M^1(n))^*$ и $M^{0,1}(n) = M^0(n) \cap M^1(n)$. У всех функций из множества $M^0(n)$ все верхние нули находятся в слоях $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем в слоях $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$ и $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ находится не более чем $\theta_1(n)$ верхних нулей, и $|M^0(n)| \sim |M^1(n)| \sim |M(n)|$ при $n \rightarrow \infty$. У каждой функции из множества $M^{0,1}(n)$ все верхние нули и все нижние единицы находятся в слоях $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$; отсюда получаем, что $|M^{0,1}(n)| \sim |M(n)|$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Обозначим } \xi(n) = \varphi(n) + \theta_1(n) + \theta_2(n).$$

Рассмотрим множество $M_{2,\varphi}^{0,1}(n) = M_2^1(n) \cap M^{0,1}(n) \cap M_\varphi(n)$. Понятно, что $|M_{2,\varphi}^{0,1}(n)| \sim |M(n)|/2$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$. У нее в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ содержится не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi(n)$ нижних единиц.

Пусть $A(f)$ — множество нижних единиц функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$. По условию $0 \leq |A(f)| \leq \theta_2(n)$. Так как каждая вершина из

$E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$ смежна с $(n+1)/2$ вершинами из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, то $0 \leq |T(A(f))| \leq \frac{n+1}{2} \theta_2(n)$. Поэтому число единиц у функции f в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ будет не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} + \xi(n) + \frac{n+1}{2} \theta_2(n)$. Следовательно, у функции f в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi(n) - \frac{n+1}{2} \theta_2(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi(n)$ нулей.

Пусть $B(f)$ — множество верхних нулей функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$. По условию $0 \leq |B(f)| \leq \theta_1(n)$. Так как каждая вершина из $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ смежна с $(n+3)/2$ вершинами из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, то $0 \leq |P(B(f))| \leq \frac{n+3}{2} \theta_1(n)$. Поскольку все нули функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ за исключением нулей из $P(B(f))$ являются верхними, то у функции f в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi(n) - \frac{n+1}{2} \theta_2(n) - \frac{n+3}{2} \theta_1(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi(n)$ верхних нулей.

Рассмотрим множество $M_{1,\varphi}^{0,1}(n) = (M_{2,\varphi}^{0,1}(n))^*$. Понятно, что $|M_{1,\varphi}^{0,1}(n)| \sim |M_{1,\varphi}^{0,2}(n)| \sim |M(n)|/2$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку нижними единицами функции f^* являются наборы, противоположные верхним нулям функции f , а верхними нулями функции f^* являются наборы, противоположные нижним единицам f , то у любой функции $f \in M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$ в слое $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$ содержится не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi(n) - \frac{n+1}{2} \theta_2(n) - \frac{n+3}{2} \theta_1(n)$ и не более чем $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi(n)$ нижних единиц и не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi(n)$ верхних нулей.

Наборы $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$, ..., $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ назовем *перекрывающимися по единицам (нулям)* по r координатам, если существуют координаты i_1, \dots, i_r из множества $\{1, \dots, n\}$ такие, что $\alpha_{i_j}^1 \vee \alpha_{i_j}^2 \vee \dots \vee \alpha_{i_j}^k = 1$ (соответственно, $\alpha_{i_j}^1 \& \alpha_{i_j}^2 \& \dots \& \alpha_{i_j}^k = 0$) для каждого $j = 1, \dots, r$. Если $r = n$, то будем говорить, что такие наборы образуют *1-множество* (соответственно, *0-множество*).

Лемма 46. При нечетном n почти все функции $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют две нижние единицы, образующие 1-множество.

Доказательство. Пусть $S(n)$ — множество функций из $M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$, не имеющих нижних единиц, которые образуют 1-множество. Доказательство

$$\frac{|S(n)|}{|M_{2,\varphi}^{0,1}(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

проводим аналогично доказательству леммы 44. Рассматриваем произвольную функцию $f \in S(n)$. Обозначим $A(f)$ — множество нижних единиц f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $B(f)$ — множество верхних нулей f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Обозначим $\xi'(n) = \xi(n) + \frac{n+1}{2} \theta_2(n) + \frac{n+3}{2} \theta_1(n)$. Тогда

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi'(n) \leq |A(f)| \leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi'(n), \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \xi'(n) \leq |B(f)| \leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \xi'(n). \quad (6.2)$$

Отметим, что $\xi'(n) = o\left(C_n^{\frac{n+1}{2}}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.

Выберем подмножества $A^*(f)$, $B^*(f)$, $A^*(f) \subseteq A(f)$, $B^*(f) \subseteq B(f)$ такие, что для любого набора из $A^*(f)$ существует набор в $B^*(f)$, образующий с ним 1-множество, и наоборот, для любого набора из $B^*(f)$ существует набор в $A^*(f)$, образующий с ним 1-множество.

Обозначим через $C(f)$ множество наборов, противоположных наборам из множества $A(f) \setminus A^*(f)$; $C(f) \subseteq E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$.

Если для некоторого набора $\alpha \in C(f)$ существует набор $\beta \in A(f)$ такой, что $\alpha < \beta$, то наборы $\bar{\alpha}, \beta \in A(f)$ и образуют 1-множество, что противоречит тому, что $f \in S(n)$. Следовательно, $C(f) \cap P(A(f)) = \emptyset$.

Если для некоторого набора $\alpha \in C(f)$ существует набор $\beta \in B(f)$ такой, что $\alpha < \beta$, то наборы $\bar{\alpha}$ и β образуют 1-множество, и $\bar{\alpha} \in A(f)$, $\beta \in B(f)$, т. е. $\bar{\alpha} \in A^*(f)$, $\beta \in B^*(f)$, что противоречит тому, что $\bar{\alpha} \in A(f) \setminus A^*(f)$. Следовательно, $C(f) \cap P(B(f)) = \emptyset$ и $C(f) \subseteq E_2^{n, \frac{n-1}{2}} \setminus P(A(f) \cup B(f))$.

Так как $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$, то $|A(f) \cup B(f)| \geq C_n^{\frac{n+1}{2}} - 2\xi'(n)$. Согласно лемме 43

$$|P(A(f) \cup B(f))| \geq |A(f) \cup B(f)|.$$

Следовательно, $|C(f)| = |A(f) \setminus A^*(f)| \leq 2\xi'(n)$ и

$$|A^*(f)| = |A(f)| - |A(f) \setminus A^*(f)| \geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - 3\xi'(n).$$

Учитывая, что каждый набор из $|B^*(f)|$ может образовывать 1-множество с не более чем $\frac{n+1}{2}$ наборами из $A^*(f)$, то

$$|B^*(f)| \geq \frac{2}{n+1} |A^*(f)| \geq \frac{1}{n+1} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \frac{6\xi'(n)}{n+1}.$$

Далее, каждой функции $f \in S(n)$, сопоставим функции $\psi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, |B^*(f)|$, получающиеся из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ путем замены какого-либо одного верхнего нуля f из множества $B^*(f)$ на единицу. Все функции ψ_i , $i = 1, \dots, |B^*(f)|$, будут монотонными, различными и $\psi_i \notin S(n)$ для любого i , так как у них будет пара нижних единиц, образующих 1-множество.

Обозначим $\Psi(n)$ — множество всех ψ_i , поставленных в соответствие всем функциям из множества $S(n)$. Посмотрим, сколько может быть прообразов у произвольной функции $\psi_i \in \Psi(n)$. Пусть ψ — некоторая функция из $\Psi(n)$. Вычислим, сколько функций из множества $S(n)$ можно получить из ψ путем замены некоторой нижней единицы ψ на ноль. Легко показать, что не более двух функций.

В самом деле, если у функции ψ только одна пара нижних единиц, образующая 1-множество, то установление в ноль значения функции на любом наборе из этой пары приводит к функции из $S(n)$. Если же у функции ψ существует более одной пары нижних единиц, образующих 1-множество, то все эти пары имеют общий набор (тот, который до этого был верхним нулем), и в этом случае только превращение этого набора в единицу функции приводит к функции из $S(n)$.

Таким образом, у каждой ψ из $\Psi(n)$ имеется не более двух прообразов из $S(n)$. Следовательно,

$$|\Psi(n)| > \frac{|S(n)|p(n)}{2}, \quad \text{где } p(n) = \min_{f \in S(n)} |B^*(f)|,$$

$$\text{Ясно, что } p(n) \geq \frac{1}{n+1} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \frac{6\xi'(n)}{n+1}.$$

Имеем

$$\frac{|S(n)|}{|M_{2,\varphi}^{0,1}(n)|} < \frac{|S(n)|}{|\Psi(n)|} < \frac{|S(n)|2}{|S(n)|p(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 47. При нечетном n почти все функции $f \in M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют 0-множество, образованное двумя верхними нулями f .

Доказательство. Возьмем $f \in M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$. Рассмотрим $f^* \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$. Если f^* имеет две нижние единицы α и β , которые образуют 1-множество, то наборы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ являются верхними нулями функции f и образуют 0-множество. Поскольку почти все функции из $M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$

имеют 1-множество, образованное двумя нижними единицами, то почти все функции из $M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют пару верхних нулей, образующих 0-множество. Лемма доказана. \square

Лемма 48. При нечетном n почти все функции $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют два противоположных верхних нуля.

Доказательство. Пусть $S(n)$ — множество функций из $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$, не имеющих противоположных верхних нулей. Докажем, что

$$\frac{|S(n)|}{|M_{2,\varphi}^{0,1}(n)|} \sim \frac{|S(n)|}{|M_2^1(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию f из $S(n)$. Обозначим $B(f)$ — множество верхних нулей f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $B'(f)$ — множество верхних нулей функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$. Так как $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$, то $|B'(f)| \leq \theta_1(n)$. Так как каждая вершина из слоя $E_2^{n,k}$ смежна с k вершинами из слоя $E_2^{n,k-1}$, то

$$|P(P(B'(f)))| \leq \frac{n+3}{2} \cdot \frac{n+1}{2} |B'(f)| \leq \frac{n+3}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \theta_1(n).$$

Множество $P(P(B'(f)))$ — это множество нулей функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, покрываемых наборами из $B'(f)$.

Обозначим через $A(f)$ множество нижних единиц функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Множество $P(A(f) \cup B(f))$ — это множество наборов из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, покрываемых наборами из $A(f)$ и $B(f)$. По лемме 43 и согласно (6.1) и (6.2)

$$|P(A(f) \cup B(f))| > |A(f) \cup B(f)| > C_n^{\frac{n+1}{2}} - 2\xi'(n).$$

Обозначим $A'(f)$ — множество нижних единиц функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$,

$$C(f) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in B(f)\},$$

$$B^*(f) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in (C(f) \cap P(A(f) \cup B(f))) \setminus (P(P(B'(f))) \cup A'(f))\}.$$

$B^*(f)$ — это множество верхних нулей функции f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ таких, что наборы, им противоположные, являются нулями, покрываются наборами из $A(f) \cup B(f)$, но не покрываются наборами из $B'(f)$:

$$\begin{aligned}
|B^*(f)| &= |(C(f) \cap P(A(f) \cup B(f))) \setminus (P(P(B'(f))) \cup A'(f))| \geq \\
&\geq |B(f)| - 2\xi'(n) - |P(P(B'(f)))| - \theta_2(n) \geq \\
&\geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - 3\xi'(n) - \frac{n+3}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \theta_1(n) - \theta_2(n).
\end{aligned}$$

Возьмем произвольный набор α из $B^*(f)$. Набор $\bar{\alpha}$ является нулем функции f и принадлежит слою $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$. Заменяем все верхние нули из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, покрывающие $\bar{\alpha}$, на единицы (число нулей не превосходит $\frac{n+1}{2}$), получим функцию ψ . Она имеет два противоположных верхних нуля: α и $\bar{\alpha}$. Следовательно, $\psi \in M_2^1(n) \setminus S(n)$. Аналогичным образом поступим с каждым нулем из $B^*(f)$. Таким образом, функции f сопоставим не менее $|B^*(f)|$ различных функций $\varphi_j \in M_2^1(n) \setminus S(n)$. Затем всем остальным функциям из $S(n)$ описанным выше способом ставим в соответствие функции $\varphi_j \in M^2(n) \setminus S(n)$.

Обозначим множество всех различных φ_i , соответствующих всем функциям f из $S(n)$, через $\Psi(n)$. Между множествами $S(n)$ и $\Psi(n)$ установлено некоторое соответствие. Вычислим максимальное число прообразов для произвольной функции φ из $\Psi(n)$. Прообразы должны получаться из φ заменой некоторой совокупности нижних единиц из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, покрывающих верхний ноль слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$ из какой-либо пары противоположных верхних нулей φ , на нули так, чтобы образовавшаяся из φ функция принадлежала множеству $S(n)$.

Если у функции φ имеется одна пара противоположных нулей, то берем тот ноль пары, который лежит в слое $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, и обозначим его α . Поскольку α — верхний ноль, то он покрывается $\frac{n+1}{2}$ единицами из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Если любую из этих единиц заменить на ноль, то α перестанет быть верхним нулем и, тем самым, полученная функция будет принадлежать $S(n)$. Поскольку число различных замен $\frac{n+1}{2}$ единиц на нули равно $2^{\frac{n+1}{2}} - 1$ (хотя бы одна единица должна быть заменена), то прообразов у данной функции φ менее $2^{\frac{n+1}{2}}$.

Пусть у функции φ имеется k ($k > 1$) пар противоположных верхних нулей. Через $C(\varphi)$ обозначим множество нулей из этих пар, которые принадлежат слою $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$. Функция φ была получена заменой не более $\frac{n+1}{2}$ нулей на единицы. Эти $\frac{n+1}{2}$ единицы покрывают менее $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ нулей из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$. Следовательно, у функции φ имеется

менее $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ пар противоположных верхних нулей, т. е. $k = |C(\varphi)| < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Перебираем по очереди все наборы $\alpha \in C(\varphi)$. Набор α покрывается $\frac{n+1}{2}$ единицами из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Те из $2^{\frac{n+1}{2}} - 1$ замен единиц на нули, у которых замененные нули покрывают все множество $C(\varphi)$, приводят к функциям из $S(n)$, являющимся прообразами функции φ . Таким образом, у функции φ имеется менее чем $k \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}$ прообразов.

Получаем

$$|S(n)|p(n) \leq |\Psi(n)| \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}},$$

где $p(n) = \min_{f \in S(n)} |B^*(f)|$. Следовательно,

$$\frac{|S(n)|}{|M_2^1(n)|} \leq \frac{|S(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{p(n)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, так как $p(n) \geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \bar{o}\left(C_n^{\frac{n+1}{2}}\right)$. Лемма доказана. \square

Лемма 49. При нечетном n почти все функции $f \in M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют две противоположные нижние единицы.

Доказательство. Если функция $f \in M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$ имеет два противоположных верхних нуля, то функция $f^* \in M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$ имеет две противоположные нижние единицы. Поскольку почти все функции из $M_{2,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют два противоположных верхних нуля, то почти все функции из $M_{1,\varphi}^{0,1}(n)$ имеют две противоположные нижние единицы. \square

Теорема 12. Для почти всех монотонных функций f выполнено $L(f) = 4$.

Доказательство. Нижняя оценка следует из леммы 41.

Верхняя оценка теоремы для четного n следует из того, что согласно леммам 44 и 45 почти все функции $f \in M(n)$ имеют два противоположных верхних нуля и две противоположные нижние единицы, которые и образуют минимальный проверяющий тест для f сложности 4.

Для нечетного n согласно леммам 46–49 для почти всех функций из $M(n)$ существуют две нижние единицы, образующие 1-множество, и два верхних нуля, образующих 0-множество, которые и образуют минимальный проверяющий тест для f сложности 4. \square

Теперь рассмотрим класс M_2 — класс всех монотонных α - и β -функций, т.е. всех монотонных функций, сохраняющих единицу. Но существует всего одна монотонная функция, не сохраняющая единицу: $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$.

Класс M_3 — класс всех монотонных α - и γ -функций. Аналогично, существует единственная монотонная функция, не сохраняющая ноль: $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$.

Класс M_4 — класс всех монотонных α -функций.

Таким образом, множества функций, существенно зависящих от n переменных классов M_1, M_2, M_3, M_4 , совпадают. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Следствие. Почти все функции f из классов типа M имеют $L(f) = 4$.

6.2. Класс D_2

Рассмотрим сначала случай четного числа переменных.

В работе [34] приведено следующее утверждение.

Лемма 50. При четном n нижние единицы почти всех функций f из $D_2(n)$ расположены в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}, E_2^{n, \frac{n}{2}}, E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, причем число нижних единиц в $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ асимптотически равно $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}$ при $n \rightarrow \infty$, а в остальных двух слоях содержится не более $C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$ нижних единиц.

Лемма 51. При четном n почти все функции $f \in D_2(n)$ имеют верхний ноль $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ и нижнюю единицу $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такие, что $\rho(\alpha, \beta) = 1$.

Доказательство. Обозначим через $D'(n)$ класс функций из $D_2(n)$ таких, что все нижние единицы этих функций лежат только в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}, E_2^{n, \frac{n}{2}}, E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, причем в каждом из слоев $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$ и $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ содержится не более $C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$ нижних единиц. $|D'(n)| \sim |D_2(n)|$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку каждая функция $f \in D'(n)$ самодвойственная, то для любой нижней единицы функции f набор, ей противоположный, является верхним нулем. Значит все верхние нули функции f лежат в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}, E_2^{n, \frac{n}{2}}, E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, причем в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$ и $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ содержится не более $C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$ верхних нулей.

Обозначим $S(n)$ — множество функций $f \in D'(n)$, для которых не выполняется условие леммы 51. Нам достаточно доказать, что

$$\frac{|S(n)|}{|D'(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in S(n)$. Обозначим $B(f)$ — множество нулей в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, не являющихся ее верхними нулями. Поскольку число верхних нулей f в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ не превосходит $C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$, то $|B(f)| \leq (\frac{n}{2} + 1) C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$. Обозначим $B^*(f)$ — множество нулей функции f в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, каждый из которых находится на расстоянии, равном 1, хотя бы с одним нулем из $B(f)$, т. е. $B^*(f)$ — множество нулей слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, покрываемых множеством $B(f)$.

Очевидно,

$$|B^*(f)| \leq \frac{n}{2} |B(f)| = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}.$$

Обозначим $A(f)$ — множество нижних единиц функции f , расположенных в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$. Обозначим через $W(f)$ множество нулей функции f в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, таких, что все наборы из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, находящиеся от них на расстоянии равном 1, являются либо единицами, либо верхними нулями f , т. е.

$$W(f) = E_2^{n, \frac{n}{2}-1} \setminus (B^*(f) \cup A(f))$$

и

$$|W(f)| \geq C_n^{\frac{n}{2}-1} - \left(\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1\right) C_n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}.$$

Возьмем произвольный набор $\beta \in W(f)$. Заменим все верхние нули f из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, покрывающие β , на единицы (их число не превосходит $\frac{n}{2}$), а противоположные этим верхним нулям нижние единицы — на нули. Получим функцию ψ . Очевидно, $\psi \in D'(n)$. Функция ψ по построению имеет верхний нуль β и нижнюю единицу α такие, что $\rho(\alpha, \beta) = 1$. Следовательно, $\psi \in D'(n) \setminus S(n)$.

Аналогичным образом поступим с каждым нулем множества $W(f)$.

Если два нуля $\beta_1, \beta_2 \in W(f)$ покрываются одним и тем же верхним нулем $\beta \in E_2^{n, \frac{n}{2}}$, а остальные наборы из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, покрывающие β_1 и β_2 , — единичные, то каждый из нулей β_1 и β_2 порождает одну и ту же функцию $\psi \in D'(n) \setminus S(n)$. Во всех остальных случаях различные нули из $W(f)$ порождают различные функции $\psi_i \in D'(n) \setminus S(n)$. Учитывая,

что один верхний нуль из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ может покрывать максимум $\frac{n}{2}$ нулей из $W(f)$, имеем, что функции f мы сопоставляем не менее $2|W(f)|/n$ различных функций $\psi_i \in D'(n) \setminus S(n)$. Затем всем остальным функциям из $S(n)$ описанным выше способом ставится в соответствие каждой не менее $p(n)$ различных функций ψ_i , $\psi_i \in D'(n) \setminus S(n)$. Заметим, что множества функций, поставленных в соответствие двум различным функциям из $S(n)$, могут содержать одинаковые функции.

Обозначим множество всех различных ψ_i , соответствующих всем функциям $f \in S(n)$, через $\Psi(n)$. Между множествами функций $S(n)$ и $\Psi(n)$ установлено некоторое соответствие. Подсчитаем, сколько прообразов может иметь произвольная функция ψ из $\Psi(n)$. Прообразы могут получаться из ψ путем замены некоторой совокупности нижних единиц ψ из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, покрывающих верхний нуль ψ из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, для которого имеется покрывающая его нижняя единица ψ , на нули, а противоположные им наборы — на единицы, так, чтобы получившаяся из ψ функция принадлежала множеству $S(n)$, т. е. была монотонной и самодвойственной, и для нее не выполнялись бы условия леммы 51. Заметим, что по построению у $\psi \in \Psi(n)$ может получиться несколько верхних нулей из $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, для которых найдутся нижние единицы $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, их покрывающие. Рассмотрим все возможные варианты.

1. Функция $\psi \in \Psi(n)$ получена из некоторой функции $f \in S(n)$ путем замены только одного верхнего нуля α на единицу, а противоположного ему набора — на ноль. Тогда при этом у ψ могут возникнуть не более $\frac{n}{2}$ верхних нулей из $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, соседних с α . Прообразы могут получаться из ψ путем замены некоторого множества нижних единиц из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, покрывающих в совокупности какой-либо один ноль. Очевидно, что в этом случае у ψ может быть не более $\frac{n}{2} 2^{\frac{n}{2}}$ прообразов.

2. Функция $\psi \in \Psi(n)$ получена из некоторой функции $f \in S(n)$ путем замены $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$, верхних нулей f на единицы. Если у ψ возникли верхние нули из $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, покрывающиеся в совокупности какой-либо одной нижней единицей из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, то этот случай аналогичен случаю 1; иначе возможны следующие варианты:

а) каждая из нижних единиц $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ функции ψ покрывает только какой-либо один верхний ноль ψ , отличный от α , из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, тогда у ψ имеется не более $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ верхних нулей из $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, каждый

из которых покрывается какой-либо нижней единицей из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$. В этом случае ψ может иметь не более $\left(\frac{n}{2} + 1\right) 2^{\frac{n}{2}+1}$ прообразов;

б) существует по крайней мере одна нижняя единица у ψ , например α_j , из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, покрывающая по крайней мере два верхних нуля γ_1 , γ_2 из $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, отличных от α , и нижняя единица α_p , покрывающая верхний ноль γ_3 , отличный от γ_1 , γ_2 и α . Но в этом случае существует только одно множество нижних единиц ψ из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, покрывающих в совокупности наборы γ_1 , γ_2 , γ_3 , α . Поскольку найдется пара из наборов γ_1 , γ_2 , γ_3 , α , например, γ_2 , γ_3 , наборы которой находятся на расстоянии 4 друг от друга и, следовательно, могут покрываться только единственным множеством нижних единиц в совокупности. В данном случае ψ может иметь не более $2^{\frac{n}{2}}$ прообразов.

Таким образом, у $\psi \in \Psi(n)$ в любом случае не может быть более $\left(\frac{n}{2} + 1\right) 2^{\frac{n}{2}+1}$ прообразов.

Получаем

$$|S(n)|p(n) \leq |\Psi(n)| \left(\frac{n}{2} + 1\right) 2^{\frac{n}{2}+1},$$

где

$$p(n) = \min_{f \in S(n)} \frac{2|W(f)|}{n} \lesssim \frac{2}{n} C_n^{\frac{n}{2}-1} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{|S(n)|}{|D'(n)|} \leq \frac{|S(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) 2^{\frac{n}{2}+1}}{p(n)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь случай нечетного числа переменных.

Лемма 52. При нечетном n почти все функции $f \in D_2(n)$ имеют три нижние единицы, образующие 1-множество.

Доказательство. В работе [34] утверждается: при нечетном n нижние единицы почти всех функций $f \in D_2(n)$ расположены в слоях $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$. Обозначим множество таких функций через $D_2^*(n)$. Имеем

$$\frac{|D_2^*(n)|}{D_2(n)} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В силу самодвойственности функций $f \in D_2^*(n)$ все верхние нули функций из $D_2^*(n)$ также лежат в слоях $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$.

Почти все функции f из $D_2^*(n)$ имеют в слое $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ хотя бы одну пару единиц, образующих 1-множество. Действительно, пусть $D_2'(n)$ — множество функций из $D_2^*(n)$, у которых нет ни одной пары единиц, образующих 1-множество. Покажем, что

$$\frac{|D_2'(n)|}{|D_2^*(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in D_2'(n)$. У нее имеется в слое $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ хотя бы одна единица α и $C_{\frac{n+3}{2}}^3$ нулей, каждый из которых образует с α 1-множество. Обозначим это множество нулей через $B(f)$. Каждый из этих нулей является верхним, поскольку в слоях $E_2^{n, i}$, где $i > \frac{n+3}{2}$, у функции f нулей нет. Сопоставим функции f функции ψ_i , $i = 1, \dots, C_{\frac{n+3}{2}}^3$, получающиеся из f путем замены одного из верхних нулей из $B(f)$ на единицу и противоположного ему набора, который является единицей функции f , на нуль. Очевидно, все ψ_i различны и $\psi_i \in D_2^*(n) \setminus D_2'(n)$. Обозначим $\Psi(n)$ — множество всех различных ψ_i , соответствующих всем $f \in D_2'(n)$. У каждой ψ_i может быть не более двух прообразов. Следовательно,

$$|D_2'(n)| C_{\frac{n+3}{2}}^3 \leq 2 |\Psi(n)|.$$

Получаем

$$\frac{|D_2'(n)|}{|D_2^*(n)|} \leq \frac{|D_2'(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{2}{C_{\frac{n+3}{2}}^3} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, почти все функции в $D_2^*(n)$ имеют хотя бы одну пару единиц, образующих 1-множество, а следовательно, учитывая, что нижние единицы функций из D_2^* располагаются не ниже слоя $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, имеем, что почти все функции в $D_2^*(n)$ имеют хотя бы одну пару нижних единиц, перекрывающихся по $(n-6)$ единицам.

Докажем, что у почти всех функций f , $f \in D_2^*(n) \setminus D_2'(n)$, найдется еще одна нижняя единица, имеющая единицы в оставшихся 6-ти рядах.

Рассмотрим функцию $f \in D_2^*(n)$, у которой нет трех нижних единиц, образующих 1-множество, но есть две нижние единицы γ_1 ,

γ_2 , перекрывающиеся по $(n - 6)$ единицам. Множество всех таких функций обозначим через $D'(n)$.

Пусть i_1, i_2, \dots, i_k ($l \leq k \leq 6$) — номера компонент, в которых наборы γ_1 и γ_2 имеют 0. Тогда все наборы из слоя $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, у которых во всех этих компонентах стоят 1, являются нулями функции f , а таких наборов $C_{n-k}^{\frac{n-3}{2}-k}$. Как мы уже отмечали, самый высокий слой, на котором может находиться ноль функции f , — это слой $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$. Каждый ноль из слоя $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ покрывает менее $\frac{n+3}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ нулей из слоя $E_2^{n, \frac{n-3}{2}}$, поэтому у функции f не менее

$$t(n) = \frac{2}{n-1} \frac{2}{n+1} \frac{2}{n+3} C_{n-6}^{\frac{n-15}{2}}$$

верхних нулей, у которых стоят единицы в 6-ти разрядах, в которых и у γ_1 , и у γ_2 стоят нули.

Обозначим множество таких верхних нулей f через $B(f)$. Сопоставим рассматриваемой функции f не менее $(t(n) - 2)$ различных функций ψ_i , получающихся из f путем замены какого-либо одного нуля $\beta \in B(f) \setminus \{\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2\}$ на единицу и противоположного ему набора $\bar{\beta}$ — на ноль. Заметим, что набор $\bar{\beta}$ является нижней единицей f и, следовательно, получившаяся функция ψ будет монотонной, самодвойственной и обладающей тремя нижними единицами, образующими 1-множество, то есть $\psi \in D_2^*(n) \setminus D'(n)$. Функции ψ_i , поставленные в соответствие функции f , получаются из f путем рассмотрения всех нулей из множества $B(f)$, кроме двух нулей, которые противоположны рассматриваемым нижним единицам γ_1, γ_2 .

Обозначим множество всех различных ψ_i , соответствующих всем функциям f из $D'(n)$, через $\Phi(n)$, $\Phi(n) \subseteq D_2^*(n) \setminus D'(n)$. Между множествами $D'(n)$ и $\Phi(n)$ установлено некоторое соответствие. Подсчитаем, сколько может иметь прообразов произвольная функция ψ из $\Phi(n)$. Прообразы могут получаться из ψ путем такой замены одной нижней единицы ψ на ноль и противоположного ей верхнего нуля — на единицу, чтобы получившаяся функция принадлежала множеству $D'(n)$, т.е. не имела трех образующих 1-множество нижних единиц. Таким образом, любая ψ может иметь не более трех прообразов. Следовательно, $|D'(n)|(t(n) - 2) \leq 3|\Phi(n)|$, и

$$\frac{|D'(n)|}{|D_2^*(n)|} \leq \frac{|D'(n)|}{|\Phi(n)|} \leq \frac{3}{t(n) - 2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана. □

Теорема 13. Для почти всех функций $f \in D_2(n)$ имеет место $L(f) = 4$ при n — четном, $L(f) \in \{4, 6\}$ при n — нечетном.

Доказательство. Согласно лемме 41 $L(f) \geq 4$ для любой функции $f \in D_2(n)$.

В случае четного числа переменных согласно лемме 51 почти все функции $f \in D_2(n)$ имеют верхний ноль β и нижнюю единицу α такие, что $\rho(\alpha, \beta) = 1$. Согласно свойствам 1, 2 (см. параграф 5.2) любые верхний ноль β и нижняя единица α монотонной функции f , для которых $\rho(\alpha, \beta) = 1$, проверяют n неисправностей, а противоположные им наборы $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ проверяют противоположные неисправности. Следовательно, наборы $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ образуют проверяющий тест для f сложности 4.

В случае нечетного числа переменных согласно лемме 52 почти все функции $f \in D_2(n)$ имеют три нижние единицы, образующие 1-множество. Отсюда в силу самодвойственности функций из $D_2(n)$ следует, что почти все функции $f \in D_2(n)$ имеют три верхних нуля, образующих 0-множество. И, следовательно, для почти всех функций $f \in D_2(n)$ выполнено $L(f) \leq 6$.

Осталось показать, что у функций из $D_2(n)$ не может быть минимального теста сложности 5. В самом деле, если у некоторой функции $f \in D_2(n)$ имеется тест сложности 5, то, значит, имеются две нижние единицы, образующие 1-множество, или два верхних нуля, образующих 0-множество. Но тогда эти два набора и два противоположных им набора в силу самодвойственности функции f образуют тест функции f сложности 4.

Теорема доказана. \square

6.3. Классы D_1, D_3

D_1 — класс всех самодвойственных α -функций, D_3 — класс всех самодвойственных функций.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в вершине $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ звездочку, если $f(\alpha) = \beta$, а во всех соседних с α вершинах функция f принимает значения $\bar{\beta}$.

Лемма 53. Почти все функции $f \in D_3$ имеют $L(f) \geq 2$, причем существенные доли функций из D_3 имеют $L(f) = 2$ и $L(f) > 2$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию f из класса D_3 . Она может иметь только четное число звездочек, так как если f имеет звездочку, то она имеет и противоположную ей звездочку. Любая пара противоположных звездочек для f является проверяющим тестом. С другой стороны, только пара противоположных звездочек

может образовывать тест сложности 2, т. е. функция, не имеющая пары противоположных звездочек, не может иметь теста сложности 2.

Всего в E_2^n существует 2^n различных пар противоположных звездочек. Занумеруем их. Будем говорить, что функция f обладает свойством p_i , если она имеет i -ю пару противоположных звездочек. Обозначим $n(p_i, p_j, \dots, p_k)$ — число функций, обладающих свойствами p_i, p_j, \dots, p_k , т. е. имеющих данные i, j, \dots, k пары противоположных звездочек. Оценим число $n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2^n})$ самодвойственных функций, не имеющих ни одной пары противоположных звездочек. По методу включений и исключений имеем

$$\begin{aligned} & n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2^n}) \geq \\ & \geq |D_3(n)| - \sum_{i=1}^{2^n} n(p_i) = 2^{2^{n-1}} - 2^n 2^{2^{n-1} - (n+1)} = \frac{1}{2} 2^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2^n})}{2^{2^{n-1}}} \geq \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2^n}) & \leq |D_3(n)| - \sum_{i=1}^{2^n} n(p_i) + \sum n(p_i, p_j) = \\ & = \frac{1}{2} 2^{2^{n-1}} + 2Z(n, 1) 2^{2^{n-1} - 2n} + \\ & \quad + 2Z(n, 2) 2^{2^{n-1} - 2n - 1} + 4 \sum_{i=3}^n Z(n, i) 2^{2^{n-1} - 2n - 2} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} 2^{2^{n-1}} + 2 \frac{n 2^{2^{n-1}}}{2} 2^{2^{n-1} - 2n} + 2 \frac{2^n C_n^2}{4} 2^{2^{n-1} - 2n - 1} + \\ & \quad + 4 C_{2^{n-1}}^2 2^{2^{n-1} - 2n - 2}, \end{aligned}$$

где $Z(n, i)$ — число пар звездочек в кубе E_2^n , центры которых находятся на расстоянии i друг от друга. Следовательно,

$$\frac{n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2^n})}{2^{2^{n-1}}} \leq \frac{1}{2} + \frac{n 2^{2^{n-1}}}{2^{2n}} + \frac{2^{n-1} C_n^2}{2^{2n}} + \frac{4 \cdot 2^{n-1} (2^{n-1} - 1)}{2 \cdot 2^{2n+2}},$$

эта величина стремится к $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{8}$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{2^n})}{2^{2^{n-1}}} \lesssim \frac{5}{8} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для величины $n(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_{2^n})$, равной числу самодвойственных функций, имеющих хотя бы одну пару противо-

ложных звездочек и, следовательно, обладающих проверяющим тестом сложности 2, имеем

$$\frac{3}{8} = 1 - \frac{5}{8} \lesssim \frac{n(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_{2^n})}{2^{2^{n-1}}} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана. \square

Рассмотрим класс функций алгебры логики

$$P = \{f(x_1, \dots, x_n), n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

таких, что на наборах из слоев $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}, E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$ функции из P принимают произвольные значения, а на всех других наборах — одинаковые для всех функций из P (например, нулевые).

Пару наборов (α^1, α^2) , где $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $\alpha^2 = (\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$, назовем *1-тестом* для f , если она проверяет все неисправности вида $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, причем по всем имеющимся в наборах α^1, α^2 единицам (т. е. если $\alpha_1^1 = \alpha_1^2 = 1$, то неисправность вида $x_i = 0$ проверяют оба набора, α^1 и α^2).

Докажем следующую лемму.

Лемма 54. *Для почти всех функций из множества P существует 1-тест.*

Доказательство леммы 54 проводится по методу, описанному в [46].

Рассмотрим наборы

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1), \quad \alpha^1 \in E_2^{n, \frac{n}{2}+2}, \\ \bar{\alpha}^1 &= (\bar{\alpha}_1^1, \dots, \bar{\alpha}_n^1), \quad \bar{\alpha}^1 \in E_2^{n, \frac{n}{2}-2}, \end{aligned}$$

α^2 — такой набор, что $\alpha^2 > \bar{\alpha}^1$ и $\alpha^2 \in E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$, т. е. α^2 получается из $\bar{\alpha}^1$ заменой некоторых четырех нулей набора $\bar{\alpha}^1$ на единицы. Отметим, что $\rho(\alpha^1, \alpha^2) = n - 4$. Число всевозможных таких пар наборов (α^1, α^2) равно $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}+2} C_n^{\frac{n}{2}-2}$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая функция из класса P . Рассмотрим случайную величину

$$\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha^1, \alpha^2) \text{ — 1-тест для } f, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\eta(f) = \sum_{(\alpha^1, \alpha^2)} \xi(f, \alpha^1, \alpha^2)$. Случайная величина $\eta(f)$ больше или равна единице в том и только в том случае, когда существует хотя бы один 1-тест для f .

Подсчитаем вероятность $\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1)$.

Набор α^i ($i = 1, 2$) проверяет неисправность вида $x_j = 0$, если $\alpha_j^i = 1$ и $f(\alpha^i) \neq f(\alpha_1^i, \dots, \alpha_{j-1}^i, \bar{\alpha}_j^i, \alpha_{j+1}^i, \dots, \alpha_n^i)$. Отметим, что если $\alpha_j^i = 1$, то набор, соседний к α^i по j -й компоненте, лежит в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ и, значит, на нем как и на наборе α^i функция f может принимать произвольные значения. Поскольку функция на фиксированной паре наборов принимает противоположные значения в двух случаях из четырех, а в каждом из наборов α^1 имеется $\alpha^2 \frac{n}{2} + 2$ единичных компонент, то при $\rho(\alpha^1, \alpha^2) = n - 4 > 2$ (т. е. при $n > 6$)

$$\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+2+\frac{n}{2}+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{M}\eta(f) = \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}+2} C_{\frac{n}{2}+2}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} = O\left(n^{\frac{7}{2}}\right); \quad (6.3)$$

$$\mathbb{D}\eta(f) = \mathbb{M}\eta^2(f) - \mathbb{M}^2\eta(f) =$$

$$= \sum_{(\alpha^1, \alpha^2), (\alpha^{1'}, \alpha^{2'})} \{ \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) - \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) \cdot \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) \}.$$

Разобьем эту сумму на несколько сумм: $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$. Сумма Σ_1 будет считаться по всем парам (α^1, α^2) , $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'})$, для которых $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) > 2$ и $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'}) > 2$, где ρ — расстояние Хэмминга между наборами куба E_2^n . Тогда случайные величины $\xi(f, \alpha^1, \alpha^2)$, $\xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'})$, $f \in P$, будут независимы и $\Sigma_1 = 0$. Сумма Σ_2 берется по всем парам (α^1, α^2) , $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'})$, для которых $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 0$ и $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'}) = 0$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &< \sum_{(\alpha^1, \alpha^2)} \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) = \\ &= \sum_{(\alpha^1, \alpha^2)} \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) = \mathbb{M}\eta(f). \end{aligned}$$

Сумма Σ_3 берется по всем оставшимся парам (α^1, α^2) , $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'})$.

Подсчитаем число рассматриваемых пар. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) \leq 2$ и $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'})$ — любое. Так как α^1 и $\alpha^{1'}$ принадлежат одному слою, то $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$. Набор α^1 выбирается из множества $E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$ мощности $C_n^{\frac{n}{2}+2}$. Число наборов $\alpha^{1'} \in E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$ таких, что $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$, равно $\left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right)$, так как по одной из

$\frac{n}{2} + 2$ единиц набора α^1 мы спускаемся в слой $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ и по одному из $\frac{n}{2} - 2$ нулей α^1 мы поднимаемся к набору $\alpha^{1'}$. Таким образом, пар наборов $(\alpha^1, \alpha^{1'})$ таких, что $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$, будет $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}+2} \left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right)$, поскольку каждый набор при подсчете учитывается два раза. К каждому из наборов α^1 и $\alpha^{1'}$ можно $C_{\frac{n}{2}+2}^4$ способами подобрать наборы α^2 и $\alpha^{2'}$, поэтому всего число рассматриваемых пар наборов будет равно

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}+2} \left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) C_{\frac{n}{2}+2}^4 C_{\frac{n}{2}+2}^4 = O\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}} n^{10}\right).$$

Оценим сверху вероятность $\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1)$ для рассматриваемых пар. Итак пусть $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$. Посмотрим когда α^1 и $\alpha^{1'}$ одновременно будут проверять всеми своими единичными компонентами неисправности типа $x_i = 0$. Всего наборов в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, соседних с наборами α^1 и $\alpha^{1'}$, будет $\frac{n}{2} + 2 + \frac{n}{2} + 2 - 1 = n + 3$, так как один соседний набор у них общий. Если $f(\alpha^1) = a$, то на всех $\frac{n}{2} + 1$ соседних с α^1 наборах из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ значение функции будет равно \bar{a} , следовательно, $f(\alpha^{1'}) = a$, так как $\alpha^{1'}$ соседний с одним из наборов, на котором функция f принимает значение \bar{a} , и, значит, на всех наборах из $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, соседних с $\alpha^{1'}$, значение функции f равно \bar{a} .

Таким образом в двух случаях из 2^{n+3} (когда $a = 0$ и $a = 1$), т. е. с вероятностью 2^{-n-2} , пара наборов α^1 и $\alpha^{1'}$ проверяет всеми своими единичными компонентами неисправности типа $x_i = 0$. Вероятность того, что наборы α^2 и $\alpha^{2'}$ одновременно всеми своими единичными компонентами проверяют неисправности вида $x_i = 0$, будет максимальной, если $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'}) = 0$, но в этом случае эта вероятность равна $2^{-\frac{n}{2}-2}$. Таким образом,

$$\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) \leq 2^{-\frac{3}{2}n-4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &< \sum_{(\alpha^1, \alpha^2), (\alpha^{1'}, \alpha^{2'})} \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}+2} \left(\frac{n}{2} - 2\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) C_{\frac{n}{2}+2}^4 C_{\frac{n}{2}+2}^4 \frac{1}{2^{\frac{3}{2}n+4}} = O\left(\frac{n^{\frac{19}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbb{D}\eta(f) \lesssim \mathbb{M}\eta(f)$ и, следовательно,

$$\frac{\mathbb{D}\eta(f)}{\mathbb{M}^2\eta(f)} \lesssim \frac{1}{\mathbb{M}\eta(f)}$$

при $n \rightarrow \infty$. Эта величина, с учетом (6.3), стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим неравенство Чебышева: для любой случайной величины ξ и любого положительного ε выполняется

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{M}\xi| \geq \varepsilon\} < \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2},$$

что равносильно

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{M}\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}. \quad (6.4)$$

Возьмем в качестве ξ введенную нами случайную величину η , положим $\varepsilon = \mathbb{M}\eta - 1$. Используя неравенство Чебышева, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\eta > 1\} &> \mathbb{P}\{2\mathbb{M}\eta - 1 > \eta > 1\} = \\ &= \mathbb{P}\{|\eta - \mathbb{M}\eta| < \mathbb{M}\eta - 1\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\eta}{(\mathbb{M}\eta - 1)^2}, \end{aligned}$$

но $\mathbb{D}\eta/(\mathbb{M}\eta - 1)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\mathbb{P}\{\eta > 1\} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана. \square

Пару наборов (α^1, α^2) , где $\alpha^1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $\alpha^2 = (\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$, назовем *0-тестом* для f , если она проверяет все неисправности вида $x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, причем по всем имеющимся в наборах α^1 , α^2 нулям (т. е. если $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$, то неисправность $x_i = 1$ проверяют оба набора α^1 и α^2).

Лемма 55. Почти все функции f из D_3 имеют $L(f) \leq 4$.

Доказательство проведем для четного числа переменных n ; при нечетном n рассуждения аналогичны.

Обозначим

$$m = |E_2^{n, \frac{n}{2}+1}| + |E_2^{n, \frac{n}{2}+2}|.$$

Разобьем множество $D_3(n)$ на $2^{2^{n-1}-m}$ непересекающихся подмножеств. Каждое подмножество будет иметь 2^m функций таких, что на всех наборах, отличных от наборов из слоев $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ и $E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$, все функции из одного множества имеют одинаковые значения. Таким образом, множество $D_3(n)$ может быть представлено в виде объединения непересекающихся множеств самодвойственных функций, различающихся только значениями на слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ и $E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$, т. е. являющихся множествами типа P . Отсюда сразу следует,

что для почти всех функций из $D_3(n)$ выполняется утверждение леммы 54, т.е. существует 1-тест. В силу самодвойственности наборы, противоположные 1-тесту, являются 0-тестом, поэтому для почти всех функций $f \in D_3(n)$ существует 0-тест и, значит, $L(f) \leq 4$.

Лемма 55 доказана. \square

Лемма 56. Для почти всех функций f из множества D_1 справедливо $2 \leq L(f) \leq 4$.

Доказательство. Действительно, пусть $\alpha(n)$ — число функций из $D_3(n)$, для которых не выполняется условие леммы 56. Из леммы 55 следует, что

$$\frac{\alpha(n)}{2^{2^{n-1}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $\alpha^*(n)$ — число функций из $D_1(n)$, для которых не выполняется условие леммы 56; $\alpha^*(n) < \alpha(n)$, поскольку $D_1 \subseteq D_3$. Следовательно,

$$\frac{\alpha^*(n)}{D_1(n)} = \frac{\alpha^*(n)}{\frac{1}{2} 2^{2^{n-1}}} \leq 2 \frac{\alpha(n)}{2^{2^{n-1}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма 56 доказана. \square

Теорема 14. Для почти всех функций f из классов D_1, D_3 имеет место $2 \leq L(f) \leq 4$, причем существенные доли функций из этих классов имеют $L(f) = 2$ и $3 \leq L(f) \leq 4$.

Доказательство теоремы 14 непосредственно следует из лемм 53, 55 и 56. \square

6.4. Классы $F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2$

Функция f удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$, если любые две единицы f имеют общую единичную компоненту. F_7^2 — класс всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2 \rangle$. Обозначим через $F_7^2(n)$ множество всех функций f из F_7^2 , зависящих от n переменных.

Далее, пока не будет обговорено обратное, будем считать, что n — четное.

Обозначим через $F_1(n)$ подмножество функций из $F_7^2(n)$ таких, что все нижние единицы лежат в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}, E_2^{n, \frac{n}{2}}, E_2^{n, \frac{n}{2}+1}, E_2^{n, \frac{n}{2}+2}, E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$.

В работе [34] установлен следующий факт.

Лемма 57. Если n четно, то $|F_7^2(n)| \sim |F_1(n)|$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 58. При четном n почти все функции f из $F_7^2(n)$ имеют три нижние единицы, образующие 1-множество.

Доказательство. Согласно лемме 57 достаточно рассматривать функции из $F_1(n)$. Покажем, что почти все функции f из $F_1(n)$ в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$ имеют хотя бы одну пару единиц, образующих 1-множество.

Действительно, пусть $F(n)$ состоит из всех функций класса $F_1(n)$, у которых нет ни одной пары единиц в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$, образующих 1-множество. Пусть $f \in F(n)$. Так как $f \neq 0$, то она имеет хотя бы одну единицу α в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$. Обозначим через B множество наборов из $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$, образующих с α 1-множество. Любой набор $\beta \in B$ имеет 1 в тех $\frac{n}{2} - 3$ компонентах, где у набора α стоят нули, а оставшиеся 6 единичных компонент β могут находиться на любых остальных $\frac{n}{2} + 3$ местах. Поэтому $|B| = C_{\frac{n}{2}+3}^6$ и все наборы из B являются нулями функции f . Поскольку функция f не содержит нижних нулей в слоях выше $\frac{n}{2} + 3$, то для любого $\beta \in E_2^{n, k}$, где $k > \frac{n}{2} + 3$, $f(\beta) = 1$, и, значит, все наборы из B являются верхними нулями функции f .

Сопоставим f функции ψ_i , $i = 1, \dots, C_{\frac{n}{2}+3}^6$, которые получаются из f заменой одного из верхних нулей из B на единицу. Очевидно, что все ψ_i , $i = 1, \dots, C_{\frac{n}{2}+3}^6$, сопоставленные f , различны и $\psi_i \in F_1(n) \setminus F(n)$. Обозначим $\Psi(n)$ — множество всех различных ψ_i , сопоставленных всем функциям $f \in F(n)$. Легко видеть, что из произвольной функции $\psi \in \Psi(n)$ можно получить заменой одной какой-либо нижней единицы ψ из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$ на ноль не более двух функций из множества $F(n)$. В самом деле, если у функции ψ только одна пара 1, образующих 1-множество, то замена любой из этих единиц приводит к функции из $F(n)$. Если же у функции ψ более одной пары единиц, образующих 1-множество, то все эти пары имеют один общий набор, и только замена этого набора на ноль приводит к функции из $F(n)$. Следовательно,

$$|F(n)| C_{\frac{n}{2}+3}^6 \leq 2 |\Psi(n)|$$

и

$$\frac{|F(n)|}{|F_1(n)|} < \frac{|F(n)|}{|\Psi(n)|} < \frac{2}{C_{\frac{n}{2}+3}^6} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, почти все функции в $F_1(n)$ имеют хотя бы одну пару единиц в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$, образующих 1-множество, а, следовательно,

почти все функции в $F_1(n)$ имеют хотя бы одну пару нижних единиц, перекрывающихся по единицам по $(n - 8)$ координатам.

В самом деле, если α_1 и α_2 — две единицы из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$ некоторой функции $f \in F_1(n)$, образующие 1-множество и нижние единицы β_1 и β_2 , покрываемые α_1 и α_2 ($\beta_1 < \alpha_1, \beta_2 < \alpha_2$), принадлежат слою $E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$, то единичные компоненты β_1 и β_2 не покрывают максимум 2 компоненты, а если же $\beta_1, \beta_2 \in E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, то единичные компоненты β_1 и β_2 не покрывают максимум 8 компонент. Докажем, что у почти всех таких функций найдется еще одна нижняя единица, имеющая единицы в оставшихся 8 координатах.

Пусть $\Phi(n)$ — множество функций из $F_1(n)$, у которых нет трех нижних единиц, образующих 1-множество, но есть две нижние единицы γ_1, γ_2 , перекрывающиеся по единицам не менее, чем по $(n - 8)$ координатам. Пусть i_1, i_2, \dots, i_k ($1 \leq k \leq 8$) — номера компонент, в которых наборы γ_1, γ_2 имеют 0. Тогда все наборы из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, у которых во всех этих компонентах стоят 1, являются нулями функции f , а таких наборов $C_{n-k}^{\frac{n}{2}-1-k}$. Как мы уже отмечали, самый высокий слой, на котором может находиться ноль функции f , — это слой $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$. Каждый ноль из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$ покрывает менее $\left(\frac{n}{2} + 3\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{n}{2}$ нулей из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, поэтому у функции f не менее

$$t(n) = \frac{1}{\frac{n}{2}} \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} \frac{1}{\frac{n}{2} + 2} \frac{1}{\frac{n}{2} + 3} C_{n-8}^{\frac{n}{2}-9}$$

верхних нулей, имеющих единицы в нулевых координатах наборов γ_1 и γ_2 . Обозначим множество этих верхних нулей f через \mathcal{O} . Сопоставим рассматриваемой функции f не менее $(t(n) - 2)$ функций ψ_i , получающихся из f следующими способами:

а) если набор $\bar{\alpha}$, противоположный рассматриваемому верхнему нулю α из \mathcal{O} , является нулевым, то функция ψ_i получается из функции f заменой верхнего нуля α на единицу;

б) если набор $\bar{\beta}$, противоположный рассматриваемому верхнему нулю β из \mathcal{O} , является единичным, то функция ψ_j получается из функции f заменой нулевого значения на наборе β на единичное, а единичного значения на наборе $\bar{\beta}$ — на нулевое.

Заметим, что в случае б) набор $\bar{\beta}$ является нижней единицей функции f , и, следовательно, получившаяся функция ψ_j будет монотонной.

В самом деле, если $\bar{\beta}$ не является нижней единицей, то существует набор γ такой, что $\gamma < \bar{\beta}$ и $f(\gamma) = 1$, но тогда $\beta < \bar{\gamma}$ и так как β

— верхний ноль, то $f(\bar{\gamma}) = 1$, т. е. функция f принимает значение 1 на противоположных наборах, что противоречит тому, что f удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$. Функции ψ_i , поставленные в соответствие функции f , будут получаться из f способами а) и б) путем рассмотрения всех нулей множества \mathcal{O} , кроме, быть может, двух нулей, если набор $\bar{\alpha}$, противоположный рассматриваемому верхнему нулю $\alpha \in \mathcal{O}$, совпадет с одной из нижних единиц γ_1 или γ_2 .

Таким образом, функции f ставятся в соответствие не менее $(t(n) - 2)$ различных функций $\psi_i \in F_1(n) \setminus \Phi(n)$. Процедура б) получения функций ψ_i понадобилась для того, чтобы функции ψ_i не выходили за границы класса $F_7^2(n)$, а для этого функции ψ_i не могут иметь единичные значения на противоположных наборах.

Далее каждой функции $f \in \Phi(n) \subseteq F_1(n)$ ставим в соответствие не менее $(t(n) - 2)$ функций $\psi_i \in F_1(n) \setminus \Phi(n)$ при помощи процедур а) или б). Обозначим множество всех различных ψ_i , поставленных в соответствие всем функциям f из $\Phi(n)$ через $\Psi(n)$. Очевидно, $\Psi(n) \subseteq \subseteq F_1(n) \setminus \Phi(n)$. Между множествами $\Phi(n)$ и $\Psi(n)$ установлено некоторое соответствие.

Подсчитаем, сколько может иметь прообразов произвольная функция ψ из $\Psi(n)$. Прообразы могут получаться из ψ при помощи «обратных» к а) или б) процедур, т. е. заменой некоторой нижней единицы ψ на ноль или одновременной заменой некоторой нижней единицы ψ на ноль и противоположного ей верхнего нуля — на единицу. При этом операции, обратные к а) и б), могут применяться к таким нижним единицам функции ψ , которые входят в какую-либо тройку нижних единиц, образующих 1-множество, и существует такая компонента, что только у данной нижней единицы стоит 1 в этой компоненте, а у остальных нижних единиц ψ в этой компоненте стоит 0. Понятно, что по построению функции ψ максимум три нижние единицы могут удовлетворять этому условию, поэтому любая ψ из $\Psi(n)$ может иметь не более шести прообразов.

Следовательно, можно оценить мощности этих множеств: $|\Phi(n)|(t(n) - 2) \leq 6|\Psi(n)|$. Получаем

$$\frac{|\Phi(n)|}{|F_1(n)|} \leq \frac{|\Phi(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{6}{t(n) - 2} = \frac{6 \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} + 3\right)}{C_{n-8}^{\frac{n}{2}-9}},$$

что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана. □

Аналогично доказывается

Лемма 59. При четном n почти все функции f из $F_7^2(n)$ имеют три верхних нуля, образующих 0-множество.

Поскольку 1-множество, состоящее из нижних единиц f , и 0-множество, состоящее из верхних нулей f , образуют проверяющий тест для функции f , то получаем

Следствие. При четном n почти все функции f из $F_7^2(n)$ имеют $L(f) \leq 6$.

Лемма 60. При четном n почти все функции f из $F_7^2(n)$ имеют $L(f) \leq 5$.

Доказательство. Из следствия вытекает, что достаточно рассматривать только те функции f из $F_7^2(n)$, для которых $L(f) \leq 6$. Обозначим множество таких функций через $\tilde{F}_7^2(n)$. Известно, что каждая функция f из $F_7^2(n)$ может быть получена из некоторых функций $\psi \in D_2(n)$, где $D_2(n)$ — класс монотонных самодвойственных функций, заменой некоторой совокупности единиц ψ на нули, при которой сохраняется монотонность.

Рассмотрим процесс постепенной замены единиц ψ на нули для получения функции f , т. е. вначале заменим на нули только некоторые нижние единицы ψ , получим функцию ψ' , затем заменим на нули некоторые нижние единицы ψ' и т. д. до тех пор, пока не получим функцию f . Очевидно, что если у функции f из $\tilde{F}_7^2(n)$ найдутся два противоположных верхних нуля, то для f утверждение леммы 60 выполнено. Будем рассматривать далее только те функции f из $\tilde{F}_7^2(n)$, у которых нет ни одной пары противоположных верхних нулей.

Каждый раз, заменяя какую-либо нижнюю единицу ψ на нуль, мы получаем пару нулевых противоположных наборов функции f . Покажем, что у почти всех f из $F_7^2(n)$ существует не менее n^{13} пар противоположных наборов.

Обозначим множество таких функций f через $F_{13}(n)$. Оценим мощность $F_{13}(n)$. Для этого рассмотрим произвольную функцию ψ из $D_2(n)$. У нее не более $C_n^{\frac{n}{2}}$ нижних единиц. Отметим, что поскольку ψ — самодвойственная функция, то у нее нет противоположных нулевых наборов. Выберем произвольным образом одну нижнюю единицу ψ и заменим ее на ноль. У получившейся функции ψ' , $\psi' \in F_7^2(n)$, снова выберем произвольную нижнюю единицу и снова заменим ее на ноль. Так будем поступать n^{13} раз. При замене нижней единицы на ноль может появиться максимум n новых нижних единиц. Поэтому у функции, полученной после n^{13} -го раза будет не более $C_n^{\frac{n}{2}} + n^{14}$ нижних единиц, и, значит, мы можем таким образом получить из ψ не более $(C_n^{\frac{n}{2}} + n^{14})^{n^{13}}$ функций из $F_7^2(n)$.

Следовательно, таким способом можно получить всего не более $|D_2(n)| (C_n^{\frac{n}{2}} + n^{14})^{n^{13}}$ функций из $F_7^2(n)$, у которых менее n^{13} пар

нулевых противоположных наборов. Поскольку любая $f \in F_{13}(n)$ получается указанным выше способом из какой-либо функции $\psi \in D_2(n)$, то, учитывая [34], при четном n получим

$$|D_2(n)| \sim 2^{\frac{1}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ C_n^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{2^{n/2}} + \frac{n^5}{2^{n+5}} - \frac{n}{2^{n+4}} \right) \right\};$$

$$|F_7^2(n)| >$$

$$> 2^{C_n^{\frac{n}{2}+1}} \exp \left\{ C_n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2^{n/2}} + \frac{3n^2}{2^{n+5}} + \frac{n}{2^{n+4}} \right) + C_n^{\frac{n}{2}+2} \left(\frac{1}{2^{n/2+2}} + \frac{n}{2^{n+7}} \right) \right\};$$

получаем

$$\frac{|F_{13}(n)|}{|F_7^2(n)|} < \frac{|D_2(n)| \left(C_n^{\frac{n}{2}} + n^{14} \right)^{n^{13}}}{|F_7^2(n)|}.$$

Последнее стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим функции f из $\tilde{F}_7^2(n)$, у которых больше, чем n^{13} пар противоположных наборов. Они составляют почти все множество $F_7^2(n)$. И рассмотрим те из них, которые принадлежат $F_1(n)$ и у которых нет ни одной пары противоположных верхних нулей. Пусть эти функции образуют множество $\Phi(n)$. Покажем, что тогда доля функций из $\Phi(n)$, у которых не найдется ни одной пары нижних единиц, образующих 1-множество, бесконечно мала в $F_7^2(n)$.

Обозначим $\tilde{\Phi}(n)$ — множество функций f из $\Phi(n)$, у которых нет ни одного 1-множества, состоящего из нижних единиц. Пусть $f \in \tilde{\Phi}(n)$.

Рассмотрим произвольную пару $\alpha, \bar{\alpha}$ противоположных нулей функции f . Поскольку $f \in F_1(n)$, то у нее нет нулей в слоях выше $\frac{n}{2} + 3$ и, следовательно, $\alpha, \bar{\alpha} \in \bigcup_{i=-3}^3 E_2^{n, \frac{n}{2}+i}$. Хотя бы один из них не является верхним нулем f (по определению множества $\Phi(n)$). Тогда их покрывают один или несколько верхних нулей f (говорим, что набор β покрывает набор α , если $\alpha \leq \beta$).

Заменим один какой-нибудь верхний ноль, покрывающий α (обозначим его β_1), на единицу, и один верхний ноль, покрывающий $\bar{\alpha}$ (обозначим его β_2) — на единицу. Получим функцию ψ , у которой существует 1-множество, образованное нижними единицами β_1 и β_2 , т.е. $\psi \in F_7^2(n) \setminus \tilde{\Phi}(n)$. Отметим, что наборы β_1, β_2 перекрываются максимум по 6 единичным компонентам (в случае если $\beta_1, \beta_2 \in E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$) и, следовательно, β_1 (также как и $\beta - 2$) может образовывать 1-множество максимум с $C_{\frac{n}{2}+3}^6$ нижними единицами f . Поскольку один ноль из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$ покрывает менее

$$\left(\frac{n}{2} + 3\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) < n^6$$

нулей из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-3}$, то один верхний ноль f может покрывать менее, чем n^6 нулей из рассматриваемых противоположных пар нулей функции f .

Следовательно, каждой f из $\tilde{\Phi}(n)$ можно поставить в соответствие описанным выше способом не менее $n^{13}/n^6 = n^7$ различных функций $\psi_i \in F_7^2(n)\tilde{\Phi}(n)$.

Пусть $\Psi(n)$ — множество всех различных функций ψ_i , поставленных в соответствие всем функциям f из множества $\tilde{\Phi}(n)$ описанным выше способом. Подсчитаем, сколько у произвольной функции $\psi \in \Psi(n)$ может быть прообразов. Прообразы могут получаться из ψ заменой некоторых пар нижних единиц ψ , образующих 1-множество, на нули. Возьмем произвольное 1-множество, образованное двумя нижними единицами ψ . Оно должно быть обязательно «разрушено», иначе получившаяся из ψ функция не будет принадлежать $\tilde{\Phi}(n)$. Таким образом, одна из нижних единиц пары (обозначим ее β) должна быть заменена на ноль, а также должна быть заменена на ноль одна из не более чем $C_{\frac{n}{2}+3}^6$ нижних единиц функции ψ , образующая с β 1-множество. Следовательно, любая функция ψ из $\Psi(n)$ может иметь $C_{\frac{n}{2}+3}^6 < n^6$ прообразов. Получаем

$$|\tilde{\Phi}(n)|n^7 < |\Psi(n)|n^6.$$

Итак,

$$\frac{|\tilde{\Phi}(n)|}{|F_7^2(n)|} \leq \frac{|\tilde{\Phi}(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{n^6}{n^7} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, доказано, что почти все функции в $F_7^2(n)$ (образующие множество $\tilde{F}_7^2(n)$) имеют 1-множество, состоящее из трех нижних единиц и 0-множество, состоящее из трех верхних нулей. Если у функции f из $\tilde{F}_7^2(n)$ найдется пара нижних единиц, образующих 1-множество, или пара верхних нулей, образующих 0-множество, то, очевидно, $L(f) \leq 5$. Далее доказано, что множество функций $\tilde{\Phi}(n)$, у которых таких множеств нет, составляют бесконечно малую долю в множестве $F_7^2(n)$. Следовательно, почти все функции f из $F_7^2(n)$ имеют $L(f) \leq 5$.

Лемма доказана. □

Теперь перейдем к рассмотрению случая нечетного числа переменных, т. е. далее будем считать, что n — нечетное число.

В работе [34] установлен следующий факт.

Лемма 61. При нечетном n нижние единицы почти всех функций f из $F_7^2(n)$ располагаются в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем число нижних единиц в $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ асимптотически равно $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}}$ при $n \rightarrow \infty$, а в остальных двух слоях содержится не более $C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$ нижних единиц.

Из леммы 61 следует, что при нечетном n существует такая функция $\zeta(n) = o\left(C_n^{\frac{n-1}{2}}\right)$, что если обозначить через $F_\zeta(n)$ множество функций f из $F_7^2(n)$, таких, что все нижние единицы функции f располагаются в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \zeta(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \zeta(n)$ нижних единиц, а в остальных двух слоях содержится не более $C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$ нижних единиц, то $|F_\zeta(n)| \sim |F_7^2(n)|$ при $n \rightarrow \infty$.

Согласно лемме 38 функция

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}\varphi(x_1, \dots, x_n) \vee \bar{x}_{n+1}\bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad (6.5)$$

принадлежит D_2 тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F_2^3$. Формула (6.5) задает взаимно однозначное соответствие между функциями f из $D_2(n+1)$ и φ из $F_7^2(n)$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Если $(\alpha, 0)$ — верхний ноль функции f , то $f(\alpha, 0) = \varphi(\alpha) = 0$ и для любого $\beta > \alpha$ выполнено $f(\beta, 0) = \varphi(\beta) = 1$, т. е. α является верхним нулем функции φ , причем если $(\alpha, 0)$ принадлежит i -му слою булевого куба E_2^{n+1} , то α принадлежит i -му слою булевого куба E_2^n . Отсюда, из леммы 50 и того, что f — самодвойственная функция, следует, что при нечетном n верхние нули почти всех функций φ из $F_7^2(n)$ располагаются в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем число верхних нулей в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ не более

$$C_{n+1}^{\frac{n+1}{2}} 2^{-\frac{n+1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n+3}{2}} < C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Так как у функций из класса $F_\zeta(n)$ число нулей в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \zeta(n) - \frac{n+1}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \zeta(n)$, то у почти всех функций из $F_\zeta(n)$ верхние нули располагаются в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем число верхних нулей

в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}, E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$ не более $C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$, а число верхних нулей в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \zeta(n) - \frac{n+1}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}} - \frac{n+3}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \zeta(n)$.

Обозначим $\varphi(n) = \zeta(n) + \frac{n+1}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}} + \frac{n+3}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$, $F_\varphi^*(n)$ — множество функций f из $F_7^2(n)$ таких, что все нижние единицы функции и верхние нули f располагаются в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}, E_2^{n, \frac{n+1}{2}}, E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, причем в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ как число нижних единиц, так и число верхних нулей составляет не менее $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \varphi(n)$ и не более $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \varphi(n)$, а в остальных двух слоях содержится не более $C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}$ как нижних единиц, так и верхних нулей. Как мы показали выше, $|F_\varphi^*(n)| \sim |F_7^2(n)|$ при $n \rightarrow \infty$. Нам достаточно рассматривать только функции из множества $F_\varphi^*(n)$.

Лемма 62. *При нечетном n почти все функции f из $F_\varphi^*(n)$ имеют 1-множество, состоящее из двух нижних единиц.*

Доказательство. Обозначим $S(n)$ — множество функций из $F_\varphi^*(n)$, не имеющих двух нижних единиц, образующих 1-множество. Докажем, что

$$\frac{|S(n)|}{|F_\varphi^*(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим произвольную f из $S(n)$. Покажем, что у нее найдется хотя бы одна нижняя единица α в $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ такая, что противоположный ей набор $\bar{\alpha}$ покрывается только верхними нулями или нижними единицами из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Действительно, из леммы 61 следует, что число наборов в $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, не являющихся нижними единицами или верхними нулями, не превосходит $2 \frac{n+3}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$. Следовательно, они могут покрывать не более $2 \frac{n+3}{2} \frac{n+1}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}}$ наборов из $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, что является бесконечно малой долей среди всех наборов слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$.

Поэтому такая нижняя единица α у f существует. Но если набор $\bar{\alpha}$ покрывается какой-либо нижней единицей β функции f , то наборы α и β образуют 1-множество.

Следовательно, наборы в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, покрывающие $\bar{\alpha}$, могут быть только верхними нулями. Функции f сопоставим функции ψ_i , $i = 1, \dots, \frac{n+1}{2}$, получающиеся из f заменой на единицу какого-либо одного верхнего нуля f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, покрывающего набор $\bar{\alpha}$. Все функции ψ_i , $i = 1, \dots, \frac{n+1}{2}$, будут различны и, очевидно, $\psi_i \in F_\varphi^*(n) \setminus S(n)$ для любого i .

Обозначим $\Psi(n)$ — множество всех различных ψ_i , поставленных в соответствие всем функциям f из множества $S(n)$. Между множествами $S(n)$ и $\Psi(n)$ установлено некоторое соответствие. Каждый элемент f из $S(n)$ имеет $\frac{n+1}{2}$ образов. Заметим, что из произвольной ψ можно получить заменой на ноль какой-либо одной нижней единицы ψ не более двух функций из $S(n)$. Следовательно, произвольная ψ из $\Psi(n)$ может иметь не более двух прообразов, тогда получаем

$$|S(n)| \frac{n+1}{2} \leq |\Psi(n)| 2.$$

Далее,

$$\frac{|S(n)|}{|F_\varphi^*(n)|} \leq \frac{|S(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{2}{\frac{n+1}{2}},$$

что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана. \square

Лемма 63. При нечетном n почти все функции f из $F_\varphi^*(n)$ имеют 0-множество, образованное двумя верхними нулями f .

Доказательство. Пусть $S(n)$ — множество функций из $F_\varphi^*(n)$, не имеющих такого 0-множества. Докажем, что

$$\frac{|S(n)|}{|F_\varphi^*(n)|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию f из $S(n)$. Обозначим $A(f)$ множество нижних единиц f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, $B(f)$ — множество верхних нулей f из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Так как $f \in F_\varphi^*(n)$, то

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - \varphi(n) \leq |B(f)| \leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + \varphi(n).$$

Возьмем произвольный набор $\alpha \in B(f)$. Обозначим $\bar{\alpha}$ набор, противоположный α . Обозначим $A'(f)$ множество единиц f из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$,

$B'(f)$ — множество наборов из $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, которые покрываются нулевыми наборами f из $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$. Так как $f \in F_\varphi^*(n)$, то

$$|A'(f)| \leq C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}, \quad |B'(f)| \leq \frac{n+1}{2} \frac{n+3}{2} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Обозначим через $B^*(f)$ множество верхних нулей f из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, противоположные наборы которых покрываются либо единичными наборами, либо верхними нулями f в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, но не принадлежат $A'(f)$ и $B'(f)$, т.е.

$$\overline{B}^*(f) \subseteq P(A(f) \cup B(f)) \setminus (A'(f) \cup B'(f))$$

(здесь $\overline{B}^*(f)$ — множество наборов противоположных наборам из $B^*(f)$). Согласно лемме 43 и $f \in F_\varphi^*(n)$, получаем

$$|B^*(f)| \geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} - 2\varphi(n) - C_n^{\frac{n-1}{2}} 2^{-\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{n+1}{2} \frac{n+3}{2}\right).$$

Пусть $\alpha \in B^*(f)$. Заменяем все верхние нули из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, покрывающие $\overline{\alpha}$, на единицы (число нулей не превосходит $\frac{n+1}{2}$), получим функцию ψ . Она имеет два противоположных верхних нуля: α и $\overline{\alpha}$. Следовательно, $\psi \in F_\varphi^*(n) \setminus S(n)$. Аналогичным образом поступим с каждым нулем из $B^*(f)$. Таким образом, функции f сопоставится не менее $|B^*(f)|$ различных функций $\varphi_j \in F_\varphi^*(n) \setminus S(n)$. Затем всем остальным функциям из $S(n)$ описанным выше способом ставятся в соответствие функции $\varphi_j \in F_\varphi^*(n) \setminus S(n)$. Обозначим множество всех различных φ_i , соответствующих всем функциям f из $S(n)$, через $\Psi(n)$. Между множествами $S(n)$ и $\Psi(n)$ установлено некоторое соответствие. Вычислим максимальное число прообразов для произвольной функции φ_i из $\Psi(n)$.

Если у функции φ_i одна пара противоположных нулей, то берем тот ноль пары, который лежит в слое $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, и обозначим его α . Поскольку α — верхний ноль, то он покрывается $\frac{n+1}{2}$ единицами из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Если любую из этих единиц заменить на ноль, то α перестанет быть верхним нулем и полученная функция будет принадлежать $S(n)$. Поскольку число различных замен $\frac{n+1}{2}$ единиц на нули равно $2^{\frac{n+1}{2}} - 1$ (хотя бы одна единица должна быть заменена), то прообразов у данной функции φ_i менее $2^{\frac{n+1}{2}}$.

Пусть у функции φ_i имеется k ($k > 1$) пар противоположных верхних нулей. Через $C(\varphi_i)$ обозначим множество нулей из этих пар, которые принадлежат слою $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$. Функция φ_i была получена заменой не более $\frac{n+1}{2}$ нулей на единицы. Эти $\frac{n+1}{2}$ единицы покрывают менее $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ нулей из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$. Следовательно, у функции φ_i имеется менее $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ пар противоположных верхних нулей, т. е. $k = |C(\varphi_i)| < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Перебираем по очереди все наборы $\alpha \in C(\varphi_i)$. Набор α покрывается $\frac{n+1}{2}$ единицами из слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$. Те из $2^{\frac{n+1}{2}} - 1$ замен единиц на нули, у которых замененные нули покрывают все множество $C(\varphi_i)$, приводят к функциям из $S(n)$, являющимся прообразами функции φ_i . Таким образом, функция φ_i имеет менее чем $k \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}$ прообразов. Получаем

$$|S(n)|p(n) \leq |\Psi(n)| \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 2^{\frac{n+1}{2}},$$

где $p(n) = \min_{f \in S(n)} |B^*(f)| \geq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n+1}{2}} + o\left(C_n^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

Следовательно,

$$\frac{|S(n)|}{|F_\varphi^*(n)|} \leq \frac{|S(n)|}{|\Psi(n)|} \leq \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 2^{\frac{n+1}{2}}}{p(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана. \square

1-множество, состоящее из двух нижних единиц, и 0-множество, состоящее из двух верхних нулей, функции f из $F_\varphi^*(n)$ при нечетном n образуют проверяющий тест для f мощности 4.

Учитывая доказанную в гл. 5 лемму 33, заметим, что из лемм 60, 62, 63 следует доказательство следующей теоремы.

Теорема 15. Для почти всех функций f из $F_7^2(n)$ имеем $4 \leq L(f) \leq 5$, если n — четное, $L(f) = 4$, если n — нечетное.

F_6^2 — класс всех монотонных α -функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2 \rangle$. Множество функций, существенно зависящих от n переменных классов F_6^2 , F_7^2 , совпадают. Классы F_2^2 , F_3^2 двойственны классам F_6^2 , F_7^2 соответственно. Следовательно, оценки сложности для функций из классов F_2^2 , F_3^2 , F_6^2 , F_7^2 совпадают.

6.5. Классы F_1^2, F_4^2, F_5^2 и F_8^2

Для начала рассмотрим класс F_8^2 — класс всех функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2 \rangle$.

D_2 — класс всех самодвойственных монотонных функций. Известно, $D_2 \subseteq F_8^2$ и любая $\psi \in D_2$ является максимальной для F_8^2 в том смысле, что добавление любой единицы к единицам ψ приводит к образованию функции, не удовлетворяющей условию $\langle A^2 \rangle$. Таким образом, любая $f \in F_8^2$ порождается некоторыми функциями из D_2 путем замены соответствующих совокупностей единиц этих функций на нули. Обозначим $K(n)$ ($K^*(n)$) — множество всех функций из класса K , зависящих от n (соответственно, не более, чем от n) переменных.

Пусть c — произвольное натуральное число. Функцию $f \in D_2^*(n)$ назовем *регулярной относительно c* , если у f существует нижняя единица, удаленная как от $(1, 1, \dots, 1)$, так и от $(0, 0, \dots, 0)$ более, чем на c (имеется в виду хэммингово расстояние между наборами E_2^n). Соответственно, функция $f \in D_2^*(n)$ не является регулярной относительно c , если все нижние единицы f удалены от $(0, 0, \dots, 0)$ или от $(1, 1, \dots, 1)$ не более, чем на c . Пусть множество $D_2^c(n) \subseteq D_2^*(n)$ содержит функции, не являющиеся регулярными относительно c , а $F^c(n) \subseteq F_8^2(n)$ — множество всех функций, порождаемых функциями из $D_2^c(n)$.

Фиксируем произвольное ε , $0 < \varepsilon \leq 1$.

Лемма 64. Для любого натурального c существует $n_\varepsilon(c)$ такое, что при $n \geq n_\varepsilon(c)$ выполняется $|F^c(n)|/|F_8^2(n)| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_k) \in D_2^c(n)$. Различным функциям $f(x_1, \dots, x_k)$ из $D_2^c(n)$ соответствуют различные наборы значений на слоях куба E_2^k , удаленных от $(1, 1, \dots, 1)$ или $(0, 0, \dots, 0)$ не более, чем на c . Следовательно,

$$|D_2^c(n)| < n 2^{2(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^c)} < n 2^{2cn^c},$$

тогда

$$|F^c(n)| \leq 2^{2cn^c} n 2^{2n-1}.$$

Известно [11], что $|F_8^2(n)| \geq 2^{2n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}}$, поэтому

$$\frac{|F^c(n)|}{|F_8^2(n)|} < \frac{n 2^{2cn^c} 2^{2n-1}}{2^{2n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} C_n^{n/2}}} = \frac{2^{2cn^c} n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} C_n^{n/2}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

□

Фиксируем ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, пусть c пробегает весь натуральный ряд, тогда по лемме 64 $n_\varepsilon(c)$ является неубывающей и неограниченной функцией, принимающей натуральные значения, поскольку всегда $n_\varepsilon(c) \geq c$. Рассмотрим функцию $c_\varepsilon(n)$, равную c при $n_\varepsilon(c) \leq n < n_\varepsilon(c+1)$, которая является неубывающей и неограниченной. Функцию $f(x_1, \dots, x_k) \in D_2^*(n)$ будем называть *регулярной относительно функции $c_\varepsilon(n)$* , если f является регулярной относительно значения $c_\varepsilon(k)$.

Из леммы 64 следует, что функции $f \in D_2^*(n)$, регулярные относительно $c_\varepsilon(n)$, порождают долю функций из класса $F_8^2(n)$, не меньшую $(1 - \varepsilon)$. Осталось доказать, что почти все из этих порожденных функций имеют $L(f) \leq 8$.

Рассмотрим случай четного n , для нечетного n рассуждения аналогичны.

Вначале рассмотрим класс $K(n)$ — класс функций алгебры логики таких, что на слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$ куба E_2^n функции $f(x_1, \dots, x_n) \in K(n)$ принимают всевозможные произвольные значения, а на всех остальных наборах — одинаковые для всех функций $f(x_1, \dots, x_n) \in K(n)$ (например, нулевые).

Лемма 65. *Для почти всех функций f , $f \in K(n)$, существует 0-тест.*

Доказательство. Воспользуемся конструкцией, приведенной в работе [46]. Возьмем набор $\alpha^1 \in E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$, противоположный ему набор обозначим $\bar{\alpha}^1 = (\bar{\alpha}_1^1, \dots, \bar{\alpha}_n^1)$, рассмотрим набор

$$\alpha^2 = (\bar{\alpha}_1^1, \dots, \bar{\alpha}_{i-1}^1, \alpha_i^1, \bar{\alpha}_{i+1}^1, \dots, \bar{\alpha}_n^1),$$

$\alpha^2 < \bar{\alpha}^1$, $\alpha^2 \in E_2^{n, \frac{n}{2}}$. Тогда число таких всевозможных пар (α^1, α^2) равно $\left(\frac{n}{2} - 1\right) C_n^{\frac{n}{2}+1}$. Отметим, что $\rho(\alpha^1, \alpha^2) = n - 1$.

Все функции n переменных из класса $K(n)$ обозначим индивидуальными символами f_1, f_2, \dots, f_k , где k — мощность $K(n)$. Будем считать, что случайная величина f равновероятно принимает значения f_1, f_2, \dots, f_k .

Пусть (α^1, α^2) — произвольная, описанная выше, пара наборов. Рассмотрим случайную величину $\xi(f, \alpha^1, \alpha^2)$:

$$\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha^1, \alpha^2) \text{ — 0-тест для } f, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Случайная величина $\xi(f, \alpha^1, \alpha^2)$ принимает значение 1 с вероятностью, не меньшей, чем доля тех функций $f \in K(n)$, для которых (α^1, α^2) есть 0-тест.

Рассмотрим еще одну случайную величину

$$\eta(f) = \sum_{(\alpha^1, \alpha^2)} \xi(f, \alpha^1, \alpha^2),$$

суммирование проводится по всем описанным выше парам наборов (α^1, α^2) ; т.е. случайная величина $\eta(f)$ больше или равна 1 в том и только в том случае, когда существует хотя бы один 0-тест для f .

Подсчитаем вероятность $\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1)$. Набор α^i ($i = 1, 2$) исправляет неисправность вида $x_j = 1$, если $\alpha_j^i = 0$ и $f(\alpha^i) \neq f(\alpha_1^i, \dots, \alpha_{j-1}^i, \bar{\alpha}_j^i, \alpha_{j+1}^i, \dots, \alpha_n^i)$. Отметим, что если $\alpha_j^i = 0$, то набор, соседний к α^i по j -й компоненте, лежит в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ и, значит, на нем как и на наборе α^i функция f может принимать произвольные значения. Поскольку функция на фиксированной паре наборов принимает противоположные значения в двух случаях из четырех, а суммарно в α^1 и α^2 имеется $n + 1$ нулевых компонент, то при $\rho(\alpha^1, \alpha^2) = n - 1 > 2$ (т.е. при $n > 3$)

$$\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

а для математического ожидания $\mathbb{M}\eta(f)$ будет выполнено:

$$\mathbb{M}\eta(f) = \left(\frac{n}{2} + 1\right) C_n^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Теперь вычислим дисперсию $\mathbb{D}\eta(f)$, по определению дисперсии имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\eta(f) &= \mathbb{M}\eta^2(f) - \mathbb{M}^2\eta(f) = \\ &= \sum_{(\alpha^1, \alpha^2), (\alpha^{1'}, \alpha^{2'})} \{ \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) - \\ &\quad - \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) \}. \end{aligned}$$

Разобьем данную сумму на несколько сумм. Σ_1 будет вычисляться по всем парам (α^1, α^2) , $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'})$, для которых $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) > 2$ и $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'}) > 2$. Тогда для $f \in K(n)$ случайные величины $\xi(f, \alpha^1, \alpha^2)$, $\xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'})$ будут независимы и поэтому $\Sigma_1 = 0$.

Σ_2 вычисляется по парам (α^1, α^2) , $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'})$, для которых $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 0$ и $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'}) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &< \sum_{(\alpha^1, \alpha^2), (\alpha^1, \alpha^2)} \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) = \\ &= \sum_{(\alpha^1, \alpha^2)} \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) = 1) = \mathbb{M}\eta(f). \end{aligned}$$

Σ_3 вычисляется по всем оставшимся парам (α^1, α^2) , $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'})$. Подсчитаем число рассматриваемых пар. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) \leq 2$ и $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'})$ — любое. Так как α^1 и $\alpha^{1'}$ принадлежат одному слою, то $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$. Набор α^1 выбирается из множества $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$ мощности $C_n^{\frac{n}{2}-1}$. Число наборов $\alpha^{1'} \in E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$ таких, что $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$, равно $\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$, так как по одной из $\frac{n}{2} - 1$ единиц набора α^1 мы спускаемся в слой $E_2^{n, \frac{n}{2}-2}$ и по одному из $\frac{n}{2} + 1$ нулей α^1 мы поднимаемся к набору $\alpha^{1'}$. Таким образом, пар наборов $(\alpha^1, \alpha^{1'})$ таких, что $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$, будет $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \left(\frac{n}{2} + 1\right)$, поскольку каждый набор при подсчете учитывается два раза. К каждому из наборов α^1 и $\alpha^{1'}$ можно $\frac{n}{2} + 1$ способами подобрать наборы α^2 и $\alpha^{2'}$, т.е. всего число рассматриваемых пар наборов будет равно

$$\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = O\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}} n^4\right).$$

Оценим сверху вероятность $\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1)$ для рассматриваемых пар.

Итак, пусть $\rho(\alpha^1, \alpha^{1'}) = 2$. Посмотрим, когда α^1 и $\alpha^{1'}$ одновременно будут исправлять всеми своими нулевыми компонентами неисправности типа $x_i = 1$. Всего в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ наборов, соседних с наборами α^1 и $\alpha^{1'}$, будет $\frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 - 1 = n + 1$, так как один соседний набор у них общий. Если $f(\alpha^1) = a$, то на всех $\frac{n}{2} + 1$ соседних с α^1 наборах из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ значение функции будет равно \bar{a} , следовательно, $f(\alpha^{1'}) = a$, так как $\alpha^{1'}$ — соседний с одним из наборов, на котором функция f принимает значение \bar{a} , и, значит, на всех наборах из $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, соседних с $\alpha^{1'}$, значение функции f равно \bar{a} .

Таким образом, в двух случаях из 2^{n+1} (когда $a = 0$ и $a = 1$), т.е. с вероятностью 2^{-n} , пара наборов α^1 и $\alpha^{1'}$ проверяет всеми своими нулевыми компонентами неисправности типа $x_i = 1$. Вероятность того, что наборы α^2 и $\alpha^{2'}$ одновременно всеми своими нулевыми компонентами проверяют неисправности вида $x_i = 1$, будет максимальной, если $\rho(\alpha^2, \alpha^{2'}) = 0$, но в этом случае эта вероятность равна $2^{-\frac{n}{2}}$. Таким образом, $\mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) \leq 2^{-\frac{3}{2}n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &< \sum_{(\alpha^1, \alpha^2), (\alpha^{1'}, \alpha^{2'})} \mathbb{P}(\xi(f, \alpha^1, \alpha^2) \xi(f, \alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = 1) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) 2^{-\frac{3}{2}n} = O\left(\frac{n^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Последнее стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом,

$$\mathbb{D}\eta(f) \lesssim \mathbb{M}\eta(f) \quad \text{и} \quad \frac{\mathbb{D}\eta(f)}{\mathbb{M}^2\eta(f)} \lesssim \frac{1}{\mathbb{M}\eta(f)},$$

причем $1/\mathbb{M}\eta(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\xi = \eta(f)$, $\varepsilon = \mathbb{M}\eta(f) - c$, $0 < c < \mathbb{M}\eta(f)$, тогда выражение $|\xi - \mathbb{M}\xi| < \varepsilon$ примет вид $|\eta(f) - \mathbb{M}\eta(f)| < \mathbb{M}\eta(f) - c$. Раскрывая модуль, получаем $c < \eta(f) < 2\mathbb{M}\eta(f) - c$. Таким образом, используя (6.5), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\eta(f) > c\} &> \mathbb{P}\{2\mathbb{M}\eta(f) - c > \eta(f) > c\} = \\ &= \mathbb{P}\{|\eta(f) - \mathbb{M}\eta(f)| < \mathbb{M}\eta(f) - c\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\eta(f)}{(\mathbb{M}\eta(f) - c)^2}, \end{aligned}$$

но $\mathbb{D}\eta/(\mathbb{M}\eta - c)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, $\mathbb{P}\{\eta(f) > c\} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана. \square

Лемма 66. Для почти всех функций $f \in K(n)$ существует 1-тест, т. е. существует пара наборов, проверяющая все неисправности вида $x_i = 0$ для $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Сопоставим каждой функции $f \in K(n)$ функцию $f' \in K(n)$ такую, что если $\alpha \in E_2^{n, \frac{n}{2}-1} \cup E_2^{n, \frac{n}{2}} \cup E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, то $f'(\alpha) = \overline{f(\overline{\alpha})}$. Тогда, если f имеет 0-тест, то f' имеет 1-тест. Отсюда с учетом леммы 65 получаем требуемое. Лемма доказана. \square

Рассмотрим произвольную функцию $\psi \in D_2^*(n)$ — регулярную относительно $c_\varepsilon(n)$. Обозначим F_ψ — множество всех функций из класса $F_8^2(n)$, порожденных функцией ψ .

Зададим произвольное ε_1 , $0 < \varepsilon_1 \leq 1$.

Лемма 67. Существует такое N , что для любого $n \geq N$ и любой функции $\psi \in D_2^*(n)$, регулярной относительно $c_\varepsilon(n)$, доля функций $f \in F_\psi$, для которых $L(f) > 8$, не превосходит ε_1 .

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $\psi(x_1, \dots, x_n)$, регулярную относительно $c_\varepsilon(n)$. У этой функции существует нижняя

единица $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такая, что $\rho(\alpha, \tilde{1}) \geq c_\varepsilon(n)$, $\rho(\alpha, \tilde{0}) \geq c_\varepsilon(n)$, где $\tilde{1} = (1, \dots, 1)$, $\tilde{0} = (0, \dots, 0)$ и, в силу самодвойственности ψ , верхний ноль $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, $\rho(\bar{\alpha}, \tilde{0}) \geq c_\varepsilon(n)$, $\rho(\bar{\alpha}, \tilde{1}) \geq c_\varepsilon(n)$. Пусть $\rho(\alpha, \tilde{1}) = t(n)$, тогда $t(n) \geq c_\varepsilon(n)$.

Рассмотрим все наборы β , $\beta \geq \bar{\alpha}$; они образуют единичный куб K_1 размерности $n - t(n) \geq c_\varepsilon(n)$; и рассмотрим все наборы γ , $\gamma \geq \alpha$, которые в свою очередь образуют $t(n)$ -мерный куб K_2 . Эти кубы пересекаются только по $\tilde{1}$. Множества $K_1 \setminus \{\bar{\alpha}\}$, K_2 целиком содержатся в единичной области ψ .

По лемме 65 почти все функции из множества K , заданные на кубе K_2 (будем обозначать их как K_{K_2}), имеют 0- и 1-тесты (α^1, α^2) и (β^1, β^2) . Пусть $a(n)$ — число функций из множества K_{K_2} , не имеющих либо 0-теста, либо 1-теста, тогда $a(n)/|K_{K_2}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$|K_{K_2}| = 2^{C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2}} + 2C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2} + 1}}.$$

Подсчитаем мощность множества функций F_ψ :

$$|F_\psi| = 2^{2^{n-1}} = |K_{K_2}| 2^{2^{n-1} - C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2}} - 2C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2} + 1}}.$$

Всего функций f в F_ψ , которые не имеют 4 наборов, проверяющих неисправности $x_i = 0$ и $x_i = 1$ по всем i , для которых $\alpha_i = 0$ в α , не более, чем:

$$a(n) 2^{2^{n-1} - C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2}} - 2C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2} + 1}},$$

так как $a(n)$ — число функций из K_{K_2} , не имеющих либо 0-теста, либо 1-теста, а F_ψ разбивается на подмножества функций, различающихся только значениями на трех средних ярусах куба K_2 , т. е. являющихся множествами типа K . Таким образом, доля этих функций $f \in F_\psi$ не превосходит величины

$$\frac{a(n) 2^{2^{n-1} - C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2}} - 2C_{t(n)}^{\frac{t(n)}{2} + 1}}}{|F_\psi|} = \frac{a(n)}{|K_{K_2}|},$$

которая, очевидно, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Проведя аналогичные рассуждения для множества функций K , заданных на кубе K_1 , получим, что доля функций $f \in F_\psi$, у которых не найдутся 4 набора, проверяющих неисправности $x_j = 0$ и $x_j = 1$ по всем j , для которых $\bar{\alpha}_j = 0$ в $\bar{\alpha}$, не превосходит величины

$$\frac{b(n) 2^{2^{n-1} - C_{n-t(n)}^{\frac{n-t(n)}{2}} - 2C_{n-t(n)}^{\frac{n-t(n)}{2} + 1}}}{|F_\psi|} = \frac{b(n)}{|K_{K_1}|},$$

которая, очевидно, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Здесь K_{K_1} — множество функций из леммы 65, заданных на кубе K_1 ; $b(n)$ — число функций из K_{K_1} , не имеющих либо 0-теста, либо 1-теста.

Так как размерности кубов K_1 и K_2 не меньше, чем $c_\varepsilon(n)$, то для любого ε_1 , $0 < \varepsilon_1 \leq 1$, и любой $\psi(x_1, \dots, x_n)$, регулярной относительно $c_\varepsilon(n)$, найдется такое N , что для любого $n \geq N$

$$\frac{a(n)}{|K_{K_2}|} < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{b(n)}{|K_{K_1}|} < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Обозначим $d(n)$ — число функций из F_ψ , у которых не найдется четырех наборов, проверяющих неисправности $x_i = 0$ и $x_i = 1$ по всем i , для которых $\alpha_i = 0$ в α , и не найдется четырех наборов, проверяющих неисправности $x_j = 0$ и $x_j = 1$ по всем j , для которых $\alpha_j = 1$ в α . Очевидно,

$$\frac{d(n)}{|F_\psi|} \leq \frac{a(n)}{|K_{K_2}|} + \frac{b(n)}{|K_{K_1}|} < \varepsilon_1.$$

Поскольку число функций f из F_ψ , для которых $L(f) > 8$, не превосходит $d(n)$, утверждение леммы доказано. \square

Лемма 68. Для любого $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, существует \tilde{N} такое, что для любого n , $n \geq \tilde{N}$, доля функций f , порожденных всеми функциями $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in D_2^*(n)$ — регулярными относительно $c_\varepsilon(n)$, имеющими $L(f) > 8$, не превосходит $\tilde{\varepsilon}$.

Доказательство. Рассмотрим $\{f_1, f_2, \dots, f_{p(n)}\}$ — множество монотонных самодвойственных функций, зависящих от n переменных, регулярных относительно $c_\varepsilon(n)$; F_f — множество функций, получающихся из функции f заменой некоторой совокупности единиц f на нули. Тогда $F(n)$ — множество функций, порожденных всеми функциями $f(x_1, \dots, x_n)$, регулярными относительно $c_\varepsilon(n)$, можно представить в виде

$$F(n) = F_{f_1} \cup \left(F_{f_2} \setminus F_{f_1 f_2} \right) \cup \left(F_{f_3} \setminus F_{f_3(f_1 \vee f_2)} \right) \cup \dots \\ \dots \cup \left(F_{f_{p(n)}} \setminus F_{f_{p(n)}(f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_{p(n)-1})} \right).$$

Заметим, что для любого i , $i = 2, \dots, p(n)$, функция $\psi_i = = f_i(f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_{i-1})$ есть монотонная функция, удовлетворяющая условию $\langle A^2 \rangle$; $\psi_i \leq f_i$.

Докажем, что для любого i , $i = 2, \dots, p(n)$, и для любого $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, существует \tilde{N} такое, что для любого $n \geq \tilde{N}$ доля функций f из $F_{f_i} \setminus F_{\psi_i}$, имеющих $L(f) > 8$, не превосходит $\tilde{\varepsilon}$.

Рассмотрим произвольную ψ_i . Возможны следующие случаи:

а) единичная область ψ_i полностью содержит средние ярусы кубов K_1, K_2 , соответствующих функции f_i (см. доказательство леммы 65), тогда как следствие из леммы 65 получаем, что для любого $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, существует N_1 такое, что для любого $n \geq N_1$ и для любой ψ_i доля функций f из $F_{f_i} \setminus F_{\psi_i}$, имеющих $L(f) > 8$, не превосходит $\tilde{\varepsilon}$;

б) средние ярусы кубов K_1, K_2 , соответствующих функции f_i , содержат ноль функции ψ_i , например, этот ноль содержится в средних ярусах куба K_2 . Тогда функция ψ имеет не более $2^{n-1} - \frac{t(n)}{2}$ единичных значений и $|F_{\psi_i}| \leq 2^{2^{n-1} - \frac{t(n)}{2}}$, следовательно,

$$\frac{|F_{\psi_i}|}{|F_{f_i}|} < \frac{2^{2^{n-1} - \frac{t(n)}{2}}}{2^{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{\frac{t(n)}{2}}} \leq \frac{1}{2^{c_\varepsilon(n)}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а так как $F_{\psi_i} \subseteq F_{f_i}$, то функции F_{ψ_i} составляют бесконечно малую долю среди функций F_{f_i} . Следовательно, для любого $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, существует N_2 такое, что для любого $n \geq N_2$ и для любой ψ_i , удовлетворяющей условию б), доля функций f из $F_{f_i} \setminus F_{\psi_i}$, имеющих $L(f) > 8$, не превосходит $\tilde{\varepsilon}$.

Возьмем $\tilde{N} = \max(N_1, N_2)$, получим, что для любого $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, существует \tilde{N} такое, что для любого $n \geq \tilde{N}$ и любого i , $i = 2, \dots, p(n)$, доля функций f из $F_{f_i} \setminus F_{\psi_i}$, имеющих $L(f) > 8$, не превосходит $\tilde{\varepsilon}$.

Обозначим $r_i(n)$ — число функций $f \in F_{f_i} \setminus F_{\psi_i}$, для которых $L(f) > 8$. Тогда для любого $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, существует \tilde{N} такое, что для любого $n \geq \tilde{N}$ и любого i , $i = 2, \dots, p(n)$, верно $r_i(n)/|F_{f_i} \setminus F_{\psi_i}| < \tilde{\varepsilon}$. (Заметим, что для множества F_{f_1} выполняется аналогичное утверждение $r_1(n)/|F_{f_1}| < \tilde{\varepsilon}$ по лемме 67.)

Так как множество $F(n)$ представляет собой объединение непесекающихся подмножеств, то, обозначая $r(n)$ — число функций f из $F(n)$, для которых $L(f) > 8$, имеем

$$\frac{r(n)}{|F(n)|} = \frac{r_1(n) + r_2(n) + \dots + r_{p(n)}(n)}{|F_{f_1}| + |F_{f_2} \setminus F_{\psi_2}| + \dots + |F_{f_{p(n)}} \setminus F_{\psi_{p(n)}}|} < \tilde{\varepsilon}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 69. Для любой функции $f \in F_8^2$ выполнено $L(f) > 2$.

Доказательство. Предположим противное, пусть существует $f \in F_8^2$, что $L(f) = 2$. Это значит, что функция f обладает парой противоположных звездочек. Обозначим центр первой звездочки через $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Если $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 1$, то так как α и $\bar{\alpha}$ не имеют общих единиц, то f не удовлетворяет условию $\langle A^2 \rangle$. Если $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 0$, то возьмем произвольный набор β такой, что $\rho(\alpha, \beta) = 1$. По условию $f(\beta) = 1$. Понятно, что $\rho(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 1$, $f(\bar{\beta}) = 1$ и, значит, $f \notin F_8^2$.

Пусть $f(\alpha) = 1$, $f(\bar{\alpha}) = 0$. Предположим, что существует номер j такой, что $\alpha_j = 0$. Рассмотрим набор $\beta = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{j-1}, 0, \bar{\alpha}_{j+1}, \dots, \bar{\alpha}_n)$. Понятно, что $\rho(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 1$ и, значит, $f(\bar{\beta}) = 1$. Но у наборов α и β нет общих единичных компонент, и, следовательно, $f \notin F_8^2$. Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha = (1, \dots, 1)$. Тогда $\bar{\alpha} = (0, \dots, 0)$ и если $\rho(\bar{\alpha}, \beta) = 1$, то $\beta \in E_2^{n,1}$, и на всех них функция f принимает значение 1. Но любая пара наборов из $E_2^{n,1}$ не имеет общих единичных компонент. Противоречие. Следовательно, для любой функции $f \in F_8^2$ $L(f) > 2$.

Лемма доказана. \square

Теорема 16. Для почти всех функций $f \in F_8^2$ имеет место $3 \leq L(f) \leq 8$.

Доказательство. Верхняя оценка теоремы следует из лемм 64–68. Нижняя оценка следует из леммы 69. Теорема доказана. \square

Рассмотрим теперь класс F_5^2 — класс всех α -функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2 \rangle$, $F_5^2 \subseteq F_8^2$ и для любой функции $f \in F_5^2$ найдется функция $f^* \in F_8^2 \setminus F_5^2$, которая отличается от f только на наборе $(1, \dots, 1)$, на котором она принимает значение 0.

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 46 верно и для класса F_5^2 . (Доказательство для этого класса проводится аналогично.)

Классы F_1^2, F_4^2 являются двойственными по отношению к классам F_5^2, F_8^2 . Поскольку минимальные проверяющие тесты для двойственных функций имеют одинаковую сложность, то оценки сложности тестов функций из классов F_1^2, F_4^2 совпадают с оценками сложности тестов из классов F_5^2, F_8^2 соответственно.

6.6. Остальные классы типа F

Вначале заметим, что множества функций из классов F_6^μ, F_7^μ , $\mu = 2, 3, 4, \dots$, существенно зависящих от n переменных, совпадают. Классы F_2^μ, F_3^μ двойственны классам F_6^μ, F_7^μ , $\mu = 2, 3, 4, \dots$, соответственно. Следовательно, оценки сложности тестов для функций из классов $F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu$, $\mu = 2, 3, 4, \dots$, совпадают. Аналогично заключаем, что оценки тестов для функций из классов $F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty$ также совпадают.

В работе [34] доказан факт, что мощности классов $F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty$ асимптотически равны мощностям соответственно классов $F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu$, $\mu = 3, 4, \dots$. Исходя из этого, достаточно рассматривать только класс F_7^∞ — класс всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty \rangle$.

Лемма 70. Почти все функции f , $f \in F_7^\infty$, имеют $L(f) = 5$.

Доказательство. Пусть $F_i(n)$ — множество функций из $F_7^\infty(n)$, у которых все единицы имеют единичную i -ю компоненту. Тогда на наборах с нулевой i -й компонентой эти функции обязательно обращаются в ноль. Возьмем некоторую функцию f , $f \in F_i(n)$. Она может быть представлена в виде

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \equiv 0, \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases} \quad (6.6)$$

где $\psi \in M_1(n-1)$. Эта формула задает взаимно-однозначное соответствие между всеми функциями $F_i(n)$ и всеми монотонными функциями ψ , зависящими от $(n-1)$ переменной.

Из леммы 39 гл. 5 следует, что между минимальными проверяющими тестами функций ψ и f , связанными формулой (6.6), имеет место соотношение $L(f) = L(\psi) + 1$. Учитывая результаты параграфа 6.1 относительно класса M_1 , получаем, что почти все функции f множества $F_i(n)$ имеют $L(f) = 5$.

Все классы $F_i(n)$ и $F_j(n)$, $i \neq j$, получают друг из друга путем переименования переменных без отождествления. Обозначим $a(n)$ — число функций g из класса $F_1(n)$, для которых $L(g) \neq 5$, тогда в классах $F_i(n)$, $i = 1, \dots, n$, также содержится ровно $a(n)$ функций u , у которых $L(u) \neq 5$. Классы $F_i(n)$ и $F_j(n)$, $i \neq j$, между собой пересекаются, а их объединение образует все множество $F_7^\infty(n)$. По методу включений и исключений имеем

$$|F_7^\infty(n)| \geq n |M_1(n-1)| - C_n^2 |M_1(n-2)|.$$

Обозначим $A(n)$ — число функций f из $F_7^\infty(n)$, у которых $L(f) \neq 5$. Тогда

$$\frac{A(n)}{|F_7^\infty(n)|} < \frac{na(n)}{|F_7^\infty(n)|} \leq \frac{na(n)}{n|M_1(n-1)| - C_n^2|M_1(n-2)|},$$

эта величина стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поскольку $\frac{a(n)}{|M_1(n-1)|} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана. □

Таким образом, из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

Лемма 71. Почти все функции f из классов $F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu$, $\mu = 3, 4, \dots$, имеют $L(f) = 5$.

Исходя из доказанного в работе [46] факта, что почти все функции f , $f \in C_1$, имеют $L(f) = 3$; и доказанного в работе [34], что мощности классов $F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty$ асимптотически равны мощностям соответственно классов $F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu$, $\mu = 3, 4, \dots$, получаем аналогично следующую лемму.

Лемма 72. Почти все функции f из классов $F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu$, $\mu = 3, 4, \dots$, имеют $4 \leq L(f) \leq 5$.

6.7. Сложность тестов для почти всех функций из классов Поста

Теорема 10. Пусть K — некоторый класс Поста, тогда для почти всех функций f из K имеют место соотношения:

- 1) $L(f) = 2$ для каждого класса K типа L ;
- 2) $L(f) = n + 1$ для каждого класса K типа S или P ;
- 3) $L(f) = 4$ при n — четном, $L(f) \in \{4, 6\}$ при n — нечетном для класса D_2 ;
- 4) $L(f) \in \{2, 3, 4\}$ для классов $K \in \{D_1, D_3\}$;
- 5) $L(f) = 4$ для каждого класса K типа M ;
- 6) $L(f) = 3$ для каждого класса K типа C [46];
- 7) $L(f) \in \{4, 5\}$ для классов

$$K \in \{F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu, \mu = 3, 4, \dots\};$$

- 8) $3 \leq L(f) \leq 8$ для классов $K \in \{F_1^2, F_4^2, F_5^2, F_8^2\}$;

- 9) $L(f) = 5$ для классов

$$K \in \{F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu, \mu = 3, 4, \dots\};$$

- 10) $L(f) = 4$ при n — нечетном, $L(f) = 5$ при n — четном для классов $K \in \{F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2\}$.

Доказательство. Для C_1 — класса всех функций алгебры логики в работе [46] показано, что для почти всех функций f , $f \in C_1$, выполняется $L(f) = 3$.

Рассмотрим класс C_2 — всех α - и β -функций. Известно, $C_2 \subseteq C_1$, $|C_2(n)| = \frac{1}{2} |C_1(n)|$. Обозначим $a_1(n)$ — число функций f , $f \in C_1(n)$, для которых выполняется $L(f) \neq 3$, $a_2(n)$ — число функций f , $f \in C_2(n)$, для которых выполняется $L(f) \neq 3$, тогда $a_2(n) < a_1(n)$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{a_2(n)}{|C_2(n)|} < \frac{a_1(n)}{|C_2(n)|} = \frac{a_1(n)}{\frac{1}{2}|C_1(n)|}.$$

Эта величина стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, почти все функции f , $f \in C_2$, имеют $L(f) = 3$.

Аналогично доказывается, что почти все функции f из классов C_3 , C_4 имеют $L(f) = 3$.

С учетом теорем 12–16, лемм 71, 72 настоящей главы и лемм 33, 34 главы 5 теорема 10 доказана. \square

О СЛОЖНОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ КЛАССОВ ПОСТА

Для каждого класса Поста K исследуются возможные значения величины $L(f)$ при условии, что f пробегает все множество K .

Теорема 11. *Справедливы утверждения:*

- 1) $L(f) = 2$ для любой функции f , существенно зависящей от n переменных, из классов типа L ;
- 2) $L(f) = n + 1$ для любой функции f , существенно зависящей от n переменных, из классов типа S или P ;
- 3) пусть

- $t(n) = 2n - 4(p + 1)$ при $2^p + 2p < n \leq 2^{p+1} + 2(p + 1)$, $p \in \mathbb{N}$;
- $c_K = 2$ для каждого класса K типа C и классов D_1, D_3 ;
- $c_K = 3$ для каждого класса

$$K \in \{F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu, \mu = 2, 3, \dots\};$$

- $c_K = 4$ для каждого класса K типа M, D_2 и классов

$$K \in \{F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2, F_2^3, F_3^3, F_6^3, F_7^3\};$$

- $c_K = 5$ для каждого класса

$$K \in \{F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu, \mu = 4, 5, \dots\},$$

тогда для любых натуральных n и r таких, что $c_K \leq r \leq t(n)$, существует функция $f \in K$, существенно зависящая от n переменных, для которой $L(f) = r$, причем значение r для класса D_2 может быть только четным числом.

7.1. Классы типов C, F и M

Пусть $K(n)$ — все функции из класса K , зависящие от n переменных; при $K = C_1$ имеем $C_1(n)$.

Лемма 73. *Для любых натуральных n и k таких, что $2 \leq k \leq 2n - 4p$, где $2^{p-1} + 2(p - 1) < n \leq 2^p + 2p$, $p \in \mathbb{N}$, существует $f \in C_1(n)$, существенно зависящая от n переменных, что $L(f) = k$.*

Доказательство. Согласно результатам глав 5, 6 существуют функции $f \in C_1(n)$, существенно зависящие от n переменных, для которых $L(f) = k$, $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. Достаточно рассмотреть $k > 5$. Пусть сначала $5 < k \leq n$. По лемме 37 гл. 5 имеем: если $\psi \in M_1(r-1)$, $f \in F_2^\infty(r)$, причем

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{r-1}, 1) = 1, \\ f(x_1, \dots, x_{r-1}, 0) = \psi(x_1, \dots, x_{r-1}), \end{cases} \quad (7.1)$$

то $L(f) = L(\psi) + 1$.

Положим $t = n + 4 - k$. Поскольку $5 < k \leq n$, то $4 < t \leq n - 2$.

Возьмем монотонную функцию $\psi \in M_1(t)$ такую, что $L(\psi) = 4$. Она существует согласно параграфу 6.1 гл. 6, при этом ψ должна иметь пару противоположных нижних единиц и пару противоположных верхних нулей, что всегда для рассматриваемых t можно сделать. Тогда построенная по формуле (7.1) функция f , $f \in F_2^\infty(t+1)$, имеет $L(f) = 5$. Эта функция f монотонна, возьмем ее в качестве функции ψ из (7.1), получим функцию f , зависящую от $(t+2)$ переменных, со сложностью теста 6. Аналогичным образом применим формулу (7.1) $(k-4)$ раза. В итоге получим функцию f , зависящую от $t+k-4 = n+4-k+k-4 = n$ переменных, у которой $L(f) = 4+k-4 = k$, что и требовалось.

Далее рассмотрим случай $n < k < 2n - 4p$. Представим $k = n + k^*$, где $0 < k^* < n - 4p$. Запишем k^* в следующем виде: $k^* = 2^p - 2p - s$, $0 \leq s < 2^{p-1} + 2$. Положим $t = k^* + 4p = 2^p + 2p - s$. Используем построенную в лемме 46 гл. 6 монотонную функцию $\psi \in M(t)$, $t = 2^p + 2p - s$, у которой $L(\psi) = 2(2^p - s) = 2t - 4p$. Искомую функцию $f(x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_n)$ получим из функции $\psi(x_1, \dots, x_t)$, применяя $(n-t)$ раз формулу (7.1) описанным в первом случае способом; в итоге функция $f \in F_2^\infty(n)$ будет иметь $L(f) = L(\psi) + n - t = 2t - 4p + n - t = n + t - 4p = n + k^* = k$, что и требовалось доказать.

Поскольку построенные в лемме 73 функции являются монотонными α -функциями, удовлетворяющими условию $\langle a^\infty \rangle$, то, учитывая структуру вложенности классов Поста, результат леммы 73 можно распространить на все классы типов C , M , F , начиная со значения $k = 5$.

Лемма 74. *Справедливы положения:*

- 1) классы F_i^μ , $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 4, 5, \dots$, не содержат функции f , для которой $L(f) \leq 4$;
- 2) в классах F_i^μ , $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 2, 3$, существуют функции f , для которых $L(f) = 4$ и не существуют функции ψ с $L(\psi) < 4$;
- 3) классы F_i^∞ , F_i^μ , $i = 1, 4, 5, 8$, $\mu = 2, 3, \dots$, не содержат функций f , которые имеют $L(f) = 2$, и содержат функции ψ с $L(\psi) \in \{3, 4\}$;
- 4) в классах типа M существуют функции f , для которых $L(f) = 4$, и не существуют функции ψ с $L(\psi) < 4$.

Доказательство. 1) В силу двойственности классов и структуры их вложения достаточно рассмотреть класс F_7^4 — класс монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^4 \rangle$.

Предположим противное, пусть найдется $f \in F_7^4$, у которой $L(f) = 4$. Тогда f должна иметь два верхних нуля, входящих в минимальный тест, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, таких, что $\alpha_i \& \beta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, т.е. не имеющих общих единичных компонент. Все наборы, покрывающие эти нули, — единичные. Единицы, покрывающие $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (соответственно $(\beta_1, \dots, \beta_n)$), имеют в совокупности общие единичные компоненты только те, для которых $\alpha_i = 1$ (соответственно $\beta_i = 1$). Очевидно, что можно выбрать две единицы, покрывающие $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и две единицы, покрывающие $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, не имеющие общих единичных компонент, следовательно, f не может принадлежать F_7^4 .

2) Достаточно построить функцию $f \in F_6^3(n)$, у которой $L(f) = 4$, где F_6^3 — класс монотонных α -функций, удовлетворяющих условию $\langle A^3 \rangle$. В случае четного n возьмем в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ два противоположных набора: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, и пусть все наборы из $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, покрывающие их, образуют множество нижних единиц функции f . В случае нечетного n возьмем произвольный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \in E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, и пусть нижними единицами функции f будут все наборы из $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, покрывающие $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и все наборы из $E_2^{n, \frac{n+3}{2}}$, покрывающие $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$. Очевидно, $f \in F_6^3(n)$. Проверяющий тест f образуют наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ и любые две нижние единицы из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, одна из которых покрывает $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, а другая — $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$. Следовательно, $L(f) = 4$, так как то, что $L(f) \geq 4$ для $\forall f \in F_6^3(n)$ следует из леммы 41.

3) Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть класс F_8^2 — класс всех функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2 \rangle$. Но для этого класса согласно лемме 69 не существует $f \in F_8^2$ такого, что $L(f) = 2$.

Достаточно привести примеры функций ψ и φ из класса F_1^∞ — α -функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty \rangle$, у которых $L(\psi) = 3$, $L(\varphi) = 4$. Возьмем любые функции ψ^* , $\varphi^* \in C_1(n-1)$, $L(\psi^*) = 2$, $L(\varphi^*) = 3$, минимальные тесты которых содержат хотя бы один нулевой набор. Тогда функции ψ и φ , полученные из функций ψ^* , φ^* с помощью формул (7.1), будут иметь $L(\psi) = 3$ и $L(\varphi) = 4$.

4) Поскольку для любой монотонной функции выполнено $f L(f) \geq 4$ по лемме 41 и согласно теореме 12 почти все монотонные функции φ имеют $L(\varphi) = 4$, то утверждение доказано. \square

7.2. Классы типа D

Рассмотрим теперь класс D_2 — монотонных самодвойственных функций.

Лемма 75. Для любого четного натурального числа k , $4 \leq k \leq 2(2^p - t)$, где $n = 2^p + 2p - t$, $0 \leq t < 2^{p-1} + 2$, $p \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, существует функция

$$f \in D_2(n),$$

существенно зависящая от n переменных, для которой $L(f) = k$.

Доказательство. Положим $n^* = 2p + \frac{k}{2}$. Поскольку $2 \leq k/2 \leq 2^p - t$, то $n^* \leq n$.

Рассмотрим построенную в лемме 36 гл. 5 монотонную функцию $\varphi_{n^*}(x_1, \dots, x_{n^*})$, которая имеет $L(\varphi_{n^*}) = k$. Используя эту функцию, с помощью формулы (7.1) образуем функцию $\varphi_{n^*+1}(x_1, \dots, x_{n^*}, x_{n^*+1})$, у которой $L(\varphi_{n^*+1}) = k + 1$. Затем, используя φ_{n^*+1} , с помощью формулы (7.1) образуем функцию $\varphi_{n^*+2}(x_1, \dots, x_{n^*}, x_{n^*+1}, x_{n^*+2})$ и т.д., всего $(n^* - n - 1)$ раз. В результате получаем функцию $\varphi_{n-1} \in F_2^\infty(n-1)$. И, наконец, по формуле

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee \bar{x}_n \bar{\varphi}_{n-1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$$

получаем f_n . Как следует из леммы 38 гл. 5, $f_n \in D_2(n)$.

Множество нижних единиц f_n задается строками табл. 7.1, полученной из табл. 5.3', 5.4 гл. 5 нижних единиц и верхних нулей функции $\varphi_{n^*}(x_1, \dots, x_{n^*})$, полоса K^* табл. 7.1 состоит из $\frac{k}{2}$ различных булевых векторов длины p , полоса \bar{K}^* — из противоположных им наборов. Полоса K табл. 7.1 состоит из всевозможных различных булевых векторов длины p , полоса \bar{K} — из противоположных им наборов. Полосы \bar{R} и R содержат всевозможные наборы $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2p})$ такие, что одна пара компонент γ_i, γ_{p+i} — нулевая, а остальные подобные пары состоят из противоположных компонент и эти наборы не покрываются никакими предыдущими наборами таблицы.

Таблица, состоящая из наборов, противоположных наборам табл. 7.1, содержит множество верхних нулей f_n . Очевидно, что никакие пары неисправностей вида $x_i = 0$, $x_i = 1$, $i = 1, \dots, \frac{k}{2}$, не могут проверяться одним набором, следовательно, $L(f_n) \geq k$. Если взять первые $\frac{k}{2} - 1$ наборов табл. 7.1 и набор, отмеченный (*), и противоположные им наборы, получим тест сложности k .

Следовательно, $L(f_n) = k$. Искомая функция построена.

Лемма доказана. \square

Таблица 7.1

	1 2 ... $\frac{k}{2}$		$\frac{k}{2} + p$		$\frac{k}{2} + p = n^*$		$n - 1$	n
$\frac{k}{2} - 1$	1 0 ... 0 0 0 1 1 0 . 0 0 ... 1 0	K^*	$\alpha_1, \alpha_2, \dots$	α_p	\bar{K}^*	$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots$	$\bar{\alpha}_p$	0 ... 0 1 1 ... 0 1
	0 ... 0 1							. . 1
	0 ... 0 0 1 0 0 ... 0	1 0 ... 0 0 0 1 1 0 0 0 ... 0 1	0 0 1 0 0 1	1 0 ... 0 0 0 1 1 0 0 0 ... 0 1	0 0 1 0 0 1 1 0 0 ... 0 1		
	0 0 1 0 0 0			0 0 ... 0	0 0	1 0 ... 0 0 1 0 1 1 0 0 ... 0 1 1	
	0 ... 0 . 0 . 0 ... 0	\bar{K}			K		1 ... 1 0 1 0	
(*)	1 0 ... 0 0 0 1 1 0 . 0 0 ... 1 0	$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots$	$\bar{\alpha}_p$	$\alpha_1, \alpha_2, \dots$	α_p		1 ... 1 0 1 0	
	0 ... 1						. . 0	
	0 ... 0 1 . 0 1 0 ... 0	1 γ_1, \dots γ_{p-1} 1 ... R 1 $\gamma_1, \dots \gamma_{p-1}$. 1	1 $\bar{\gamma}_1, \dots$ $\bar{\gamma}_{p-1}$ 1 ... \bar{R} 1 $\bar{\gamma}_1, \dots \bar{\gamma}_{p-1}$. 1	1 γ_1, \dots γ_{p-1} 1 ... 1 $\gamma_1, \dots \gamma_{p-1}$. 1	1 $\bar{\gamma}_1, \dots$ $\bar{\gamma}_{p-1}$ 1 ... 1 $\bar{\gamma}_1, \dots \bar{\gamma}_{p-1}$. 1 0 1 1 1 ... 1 0		
	0 ... 0					 0 1 1 1 ... 1 0	

Таблица 7.2

	1	2	...	$2^p - t$	$2^p - t + p$				$n - 1$	n				
	1	0	...	0	0					0	1			
	0	1		.	K^*				\overline{K}^*					
	$\alpha_1, \alpha_2,$...	α_p	$\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2,$...	$\overline{\alpha}_p$.	.		
		
	.			1	0						.	.		
	0	0	...	0	1						0	1		
(*)	0	...		0	1	0	...	0	1	0	...	0	0	1
	0	...		0	0	1	0	...	0	0	0	0	0	1
	.			.	.	0	1		.	.	0	1	.	.
	.	0	

	.			.	.		1	0	.	1	0	.	.	.
	0	...		0	0	0	0	...	0	1	0	1	0	1
	0	0	1	1		
	0	...		0	\overline{K}				K				1	0
	.	0
	0	...		0	\overline{K}				K				.	.
	1	0	...	0									0	0
	0	1		.	$\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2,$...	$\overline{\alpha}_p$	$\alpha_1, \alpha_2,$...	α_p

	.			1						
	0	0	...	0	1						1	0		
	0	...		0	1				1		1	0		

	.			.	.	$\gamma_1,$...	γ_{p-1}	.	$\overline{\gamma}_1,$...	$\overline{\gamma}_{p-1}$.	.
	.			.	.	1			1
	.	0	
	.			.				1			1	1	.	.
	.			.		R	.	.		\overline{R}
	.			.	$\gamma_1,$...	γ_{p-1}	.	$\overline{\gamma}_1,$...	$\overline{\gamma}_{p-1}$.	.	.
	.			.				1			1	1	.	.
	0	...		0				1			1	0		

Поскольку $D_2 \subseteq D_1 \subseteq D_3$, то утверждение леммы 75 верно для классов D_1, D_3 . Осталось выяснить, существуют ли самодвойственные функции, сложность тестов которых суть нечетные числа.

Лемма 76. Для любого $l = 2k + 3, k \in \mathbb{N}, k < 2^p - t - 1$, где $n = 2^p - t + 2p + 2, p \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$, существует $f \in D_1(n)$, существенно зависящая от n переменных, для которой $L(f) = l$.

Доказательство. В лемме 39 гл. 5 построена $f_n \in D_2(n)$, $n = 2^p - t + 2p + 2$, для которой $L(f_n) = 2(2^p - t)$. Множество нижних единиц функции f_n задается строками табл. 7.2. Полоса K табл. 7.2 состоит из всевозможных различных булевых векторов длины p , полоса \overline{K} — из противоположных им наборов. Полоса K^* табл. 7.2 состоит из $(2^p - t)$ различных булевых векторов длины p , полоса \overline{K}^* — из противоположных им наборов. Полосы R и \overline{R} содержат всевозможные наборы $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2p})$ такие, что одна пара компонент γ_i, γ_{p+i} — нулевая, а остальные подобные пары состоят из противоположных компонент и эти наборы не покрываются никакими предыдущими наборами таблицы. Таблица, состоящая из наборов, противоположных наборам табл. 7.2, содержит множество верхних нулей f_n .

Рассмотрим набор

$$\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{2^p - t}, \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{2p}, (0, 1).$$

Функция f_n на этом наборе принимает значение 1, поскольку он покрывает набор, отмеченный (*) в табл. 7.2. Будем рассматривать $k \geq 2$. Фиксируем произвольный набор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in E_2^k$. Рассмотрим $s = 2^p - t - k$, $s \geq 2$, s -мерный куб E_2^s , образованный всевозможными наборами

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2p}, 0, 1),$$

где $\alpha_i \in E_2$, $i = 1, \dots, s$. На всех наборах куба E_2^s функция f_n равна 1.

Далее выберем произвольную функцию $\varphi_s \in C_1(s)$ такую, у которой $L(\varphi_s) = 3$. Это возможно, поскольку почти все функции от s переменных имеют минимальные тесты сложности 3, причем нетрудно заметить, что, начиная с $s = 2$, такие функции существуют. Обозначим

$$E^* = \{(x_1, \dots, x_s, \beta_1, \dots, \beta_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2p}, 0, 1), \beta_i \in E_2, i = 1, \dots, k\},$$

т. е. E^* — множество, состоящее из 2^k s -мерных кубов E_2^s . Определим функцию $F(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \varphi_s(x_1, \dots, x_s) & \text{при } (x_1, \dots, x_n) \in E^*, \\ \overline{\varphi}_s(x_1, \dots, x_s) & \text{при } (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \in E^*, \\ f_n(x_1, \dots, x_n) & \text{на остальных наборах.} \end{cases}$$

Очевидно, построенная функция $F(x_1, \dots, x_n)$ является самодвойственной. Функция $F(x_1, \dots, x_n)$ — искомая. Действительно, пусть

$$T(\varphi_s) = \{(\gamma_1^1, \dots, \gamma_s^1), (\gamma_1^2, \dots, \gamma_s^2), (\gamma_1^3, \dots, \gamma_s^3)\}.$$

Тогда наборы $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_s^1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1)$, $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_s^2, 1, \dots, 1, 0, 1)$, $(\gamma_1^3, \dots, \gamma_s^3, 1, \dots, 1, 0, 1)$ для функции $F(x_1, \dots, x_n)$ будут проверять неисправности вида $x_i = 0$, $x_i = 1$, $i = 1, \dots, s$, и не будут проверять ни одну из неисправностей вида $x_j = 0$, $x_j = 1$, $j = s + 1, \dots, s + k$, поскольку по построению $F(x_1, \dots, x_n)$ для любого $(\beta_1, \dots, \beta_k) \in E_2^k$ выполняется

$$F(x_1, \dots, x_s, \beta_1, \dots, \beta_k, 1, \dots, 1, 0, 1) = \varphi_s(x_1, \dots, x_s).$$

Эти неисправности таковы, что ни одна пара из них не может проверяться одним набором. Следовательно, для их проверки потребуется $2k$ наборов, например, k наборов из табл. 7.2, имеющих в координатах $j = s + 1, \dots, s + k$ единицы, и k противоположных им наборов. Получаем $L(F) = 2k + 3$.

Рассмотрим теперь случай $k = 0$. Приведем один из алгоритмов построения самодвойственной функции $g(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей от n переменных, для которой $L(g) = 3$.

Положим $g(1, 1, \dots, 1) = 1$, $g(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$; пусть на всех остальных наборах слоя $E_2^{n, n-1}$ функция g равна 1, на всех противоположных им наборах g принимает противоположные значения. Тогда набор $(1, \dots, 1)$ проверяет все неисправности вида $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Затем полагаем, что n достаточно большое, чтобы можно было выбрать две непересекающиеся окружности радиуса 1, расположенные в слоях $E_2^{n, 2}, \dots, E_2^{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$ так, чтобы их центры были наборами, перекрывающимися по нулям. В центрах этих окружностей полагаем g равной 1; на наборах, покрывающих центры, — нулям; на наборах, отличающихся от центра в n -й координате, — нулям; на остальных наборах окружностей — единицам; и, наконец, на наборах, противоположных наборам этих окружностей, — противоположные значения.

Доопределим функцию на оставшихся наборах следующим образом: в случае нечетного n на наборах слоя $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$ функция g равна 1, на наборах слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$ — нулю; в случае четного n на противоположных наборах слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ функция g принимает противоположные значения произвольным образом. И, наконец, на всех оставшихся наборах верхней половины куба $E_2^{n, n-2}, \dots, E_2^{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ функция g равна 1, а на противоположных им наборах — нулю. Нетрудно видеть, что это построение возможно, начиная с $n = 10$.

Построенная функция g является самодвойственной, у нее нет противоположных наборов, образующих тест, следовательно, $L(g) \geq 3$. Набор $(1, 1, \dots, 1)$ и центры выбранных при построении окружностей образуют проверяющий тест для g сложности 3, что и требовалось.

Для построения самодвойственной функции ψ , у которой $L(\psi) = 5$, можно воспользоваться приведенным выше алгоритмом построения функции g , $L(g) = 3$.

Рассмотрим построенную в лемме 75 монотонную самодвойственную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, у которой $L(f) = 6$. Преобразуем ее в самодвойственную функцию ψ , у которой $L(\psi) = 5$. Делать это будем в несколько шагов.

1) Для каждого набора $(x_1, \dots, x_n) \in E_2^{n,n} \cup E_2^{n,n-1} \cup E_2^{n,0} \cup E_2^{n,1}$ положим $\psi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$.

2) Выберем окружности согласно приведенному алгоритму построения g так, чтобы они принадлежали нулевой области f , согласно табл. 7.1 это можно сделать.

3) Зафиксируем некоторый номер переменной j . Определим ψ на наборах окружностей и их центрах так же, как и функцию g , кроме наборов, покрывающих центры окружностей и имеющих единичную j -ю координату, и наборов, покрываемых центрами окружностей и имеющих нулевую n -ю координату, на которых положим ψ равной нулю, а на противоположных им наборах — единице. В результате центры выбранных окружностей вместе будут проверять все неисправности вида $x_i = 1$ за исключением неисправности вида $x_j = 1$ и $x_n = 0$.

4) На всех оставшихся наборах значение ψ полагаем равным значению f .

Построенная функция ψ является самодвойственной. Набор $(1, 1, \dots, 1)$, центры выбранных при построении окружностей, и еще два набора, проверяющие неисправности $x_j = 1$ и $x_n = 0$, образуют тест для ψ сложности 5. Теста меньшей сложности в силу построения ψ нет, следовательно, $L(\psi) = 5$. Лемма полностью доказана. \square

С учетом лемм 73, 74, 75 и лемм 33, 34 гл. 5 теорема 11 доказана. \square

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ КЛАССОВ ПОСТА

8.1. Классы типа C

Вначале рассмотрим класс C_1 — всех функций алгебры логики. Назовем множество двоичных наборов *регулярным*, если оно является проверяющим тестом какой-либо функции f , $f \in C_1$.

Лемма 77. *Наборы $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$, ..., $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ из E_2^n образуют регулярное множество тогда и только тогда, когда*

$$\bigvee_{j=1}^k \alpha_i^j = 1 \quad \& \quad \bigwedge_{j=1}^k \alpha_i^j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.1)$$

Действительно, неисправности вида $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, могут проверяться только наборами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, у которых $\alpha_i = 1$; а неисправности вида $x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, соответственно, наборами $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, у которых $\beta_i = 0$. С другой стороны, любое множество наборов, удовлетворяющее соотношениям (8.1), образует проверяющий тест для линейной функции $L(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \pmod{2}$ и, следовательно, является регулярным.

Заметим, исходя из соотношения (8.1), что мощность регулярного множества не может быть меньше двух.

Рассмотрим регулярные множества мощности 2. Очевидно, что они представляют собой пары противоположных наборов. Таких множеств всего 2^{n-1} . Заметим, что функция f из множества $C_1(n)$ имеет $L(f) = 2$, если она обладает по крайней мере двумя звездочками, центры которых образуют регулярное множество, т. е. противоположны. Фиксируем два противоположных набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$. Нетрудно видеть, что всего в множестве $C_1(n)$ имеется $2^{2^n - 2(n+1) + 2}$ функций, для которых α и $\bar{\alpha}$ образуют тест. Таким образом, доля функций f , $f \in C_1(n)$, имеющих $L(f) = 2$, не превосходит

$$\frac{2^{2^n} 2^{n-1}}{2^{2(n+1)-2} 2^{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Эта величина стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Перенумеруем все регулярные множества мощности 2. Обозначим $Z_i(n)$ — класс функций, для которых i -е множество является тестом, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$. Тогда множество $C_1(n)$ можно представить в виде

$$C_1(n) = (Z_1(n) \cup Z_2(n) \cup \dots \cup Z_{2^{n-1}}(n)) \oplus \tilde{C}_1(n),$$

где $\tilde{C}_1(n)$ — класс функций f , которые имеют $L(f) \geq 3$. (Обозначаем $A = B \oplus C$, если $B \cap C = \emptyset$.)

Для любых i, j при $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j$, имеем $Z_i(n) \cap Z_j(n) = \emptyset$. Функция $f \in Z_i(n) \cap Z_j(n)$, если f обладает i -й и j -й парами противоположных звездочек.

Далее будем рассматривать тройки наборов, образующих регулярные множества. Число всевозможных троек различных наборов куба E_2^n есть $C_{2^n}^3 = O(8^n)$. В соответствии с леммой 77, число регулярных троек равно 6^{n-1} . Таким образом, доля регулярных троек в множестве всевозможных троек наборов есть $O\left(\frac{6^n}{8^n}\right) = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$, она стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Фиксируем произвольную регулярную тройку наборов. Оценим долю функций, для которых она является тестом. Число таких функций не меньше $2^{2^n - 3(n+1)}$, а их доля в множестве $C_1(n)$ не меньше

$$\frac{2^{2^n - 3(n+1)}}{2^{2^n}} = \frac{1}{8^{n+1}}.$$

Перенумеруем все регулярные тройки. Обозначим $K_i(n)$, $i = 1, \dots, 6^{n-1}$, — множество функций, для которых i -я тройка является тестом. Учитывая, что почти все функции f , $f \in C_1(n)$, имеют $L(f) = 3$ (см. [46]), получаем, что почти все функции f , $f \in C_1(n)$, принадлежат какому-либо классу $K_i(n)$, $i = 1, \dots, 6^{n-1}$. Множество $C_1(n)$ представимо в виде

$$C_1(n) = (Z_1(n) \cup Z_2(n) \cup \dots \cup Z_{2^{n-1}}(n)) \oplus \\ \oplus (K_1(n) \cup K_2(n) \cup \dots \cup K_{6^{n-1}}(n)) \oplus \tilde{C}_1^*(n),$$

где $\tilde{C}_1^*(n)$ — множество функций f , которые имеют $L(f) \geq 4$. Учитывая возможные значения величины $L(f)$ для функций класса $C_1(n)$, вытекающие из леммы 73 гл. 7, заключаем, что множество $\tilde{C}_1^*(n)$ представимо в виде

$$\tilde{C}_1^*(n) = C_1^4(n) \oplus C_1^5(n) \oplus C_1^6(n) \oplus \dots \oplus C_1^{t(n)}(n), \quad t(n) \sim 2n, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $C_1^r(n)$ — множество функций, существенно зависящих от n переменных, у которых $L(f) = r$, а $C_1^{t(n)}(n)$ содержит все функции f ,

существенно зависящие от n переменных, у которых $L(f) \sim 2n$, $n \rightarrow \infty$. При этом все классы $C_1^r(n)$ не пусты. Итак,

$$\begin{aligned} C_1(n) = & (Z_1(n) \cup Z_2(n) \cup \dots \cup Z_{2^{n-1}}(n)) \oplus \\ & \oplus (K_1(n) \cup K_2(n) \cup \dots \cup K_{6^{n-1}}(n)) \oplus \\ & \oplus C_1^4(n) \oplus C_1^5(n) \oplus C_1^6(n) \oplus \dots \oplus C_1^{t(n)}(n), \end{aligned} \quad (2)$$

$t(n) \sim 2n$, $n \rightarrow \infty$. Второе слагаемое прямой суммы содержит почти все функции из $C_1(n)$.

Очевидно, что для остальных классов типа C получается аналогичное разложение.

Алгоритм построения минимальных проверяющих тестов для произвольной функции алгебры логики приведен в работе [67].

8.2. Классы типов L, S, P

Из леммы 34 гл. 5 вытекает, что любая линейная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет $L(f) = 2$ и ее тест есть множество

$$T(f) = \{(0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1)\}.$$

Рассмотрим $L_1(n)$ — класс всех линейных функций, зависящих от n переменных.

Лемма 78. *Имеет место представление*

$$L_1(n) = Z_1(n) \cap Z_2(n) \cap \dots \cap Z_{2^{n-1}}(n),$$

где $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, — классы разложения (2).

Доказательство. Любая линейная функция, существенно зависящая от n переменных, обладает звездочкой с центром α , где α — произвольный набор куба E_2^n . Следовательно, любое регулярное множество мощности 2 будет тестом линейной функции, поэтому

$$L_1(n) \subseteq Z_1(n) \cap Z_2(n) \cap \dots \cap Z_{2^{n-1}}(n).$$

Обратно, функция ψ , принадлежащая каждому из классов $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, должна обладать звездочками с центрами в каждом наборе куба E_2^n . Следовательно, если $\psi(1, 1, \dots, 1) = \alpha$, $\alpha \in E_2$, тогда на наборах слоя $E_2^{n, n-1}$ она должна принимать значения $\bar{\alpha}$; на наборах следующего слоя — α , и так далее до слоя $E_2^{n, 0}$. Таким образом, ψ должна быть линейной функцией. Лемма доказана. \square

Теперь рассмотрим классы типов S и P . Из леммы 33 гл. 5 следует, что $L(f) = n + 1$ для любой существенно зависящей от n переменных

функции f , $f \in K$, где K — класс типов S или P . Следовательно, все классы этих типов принадлежат классу $C_1^{n+1}(n)$ разложения (2). Классы S_i , $i = 1, 3, 4, 6$, содержат единственную с точностью до переименования переменных функцию, существенно зависящую от n переменных:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n.$$

Из леммы 33 гл. 5 получаем, что минимальный проверяющий тест для $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид

$$T(f) = \{(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}.$$

Для двойственных классов P_i , $i = 1, 3, 4, 6$, содержащих функции вида $\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n$, получаем

$$T(\psi) = \{(1, 1, \dots, 1), (0, 1, \dots, 1), (1, 0, 1, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1, 0)\},$$

поскольку тест двойственной функции состоит из наборов, противоположных наборам теста данной функции.

8.3. Классы типа M

Рассмотрим вначале класс M_1 — класс всех монотонных функций. Из леммы 41 гл. 6 имеем, что для почти всех функций f , $f \in M_1(n)$, $L(f) = 4$. Далее из доказанного в гл. 6 вытекает, что в случае четного числа переменных минимальные тесты почти всех монотонных функций состоят из двух противоположных верхних нулей и двух противоположных нижних единиц, причем существует минимальный тест, наборы которого расположены в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$. Всего в $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ пар противоположных наборов $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}$. Значит, число регулярных множеств мощности 4 в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}}$ для множества $M_1(n)$ равно $C_2^2 \frac{1}{2} C_n^{n/2}$. Всего множеств из двух пар противоположных наборов куба $E_2^{n, \frac{n}{2}} - C_{2^{n-1}}^2$, т.е. доля рассматриваемых регулярных множеств есть $O\left(\frac{1}{n}\right)$, что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Фиксируем произвольную регулярную четверку наборов, рассмотренных выше. Используя результаты [33], получаем, что число функций из $M_1(n)$, для которых она является тестом, не меньше

$$\frac{2^{C_n^{\frac{n}{2}-3}}}{|M_1(n)|} \sim \frac{1}{2^3 \exp \left\{ C_n^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{2^{n/2}} + \frac{2}{2^{n+5}} - \frac{n}{2^{n+4}} \right) \right\}}.$$

В случае нечетного числа, когда $M_1(n) = M_1^1(n) \oplus M_1^2(n)$, в параграфе 6.1 гл. 6 доказано, что минимальные тесты почти всех функций множества $M_1^1(n)$ состоят из двух нижних единиц, образующих 1-множество и расположенных в слое $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, и двух противоположных верхних нулей, образующих 0-множество и расположенных в слоях $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$; а минимальные тесты почти всех функций множества $M_1^2(n)$ — из двух верхних нулей функции из слоя $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, образующих 0-множество, и двух противоположных нижних единиц из слоев $E_2^{n, \frac{n-1}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n+1}{2}}$, образующих 1-множество.

Исходя из леммы 41 гл. 6, не существует монотонной функции f , которая имела бы $L(f) < 4$, поэтому ни одна монотонная функция не принадлежит классам $K_i(n)$, $i = 1, \dots, 6^{n-1}$, и $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, разложения (8.1). Почти все монотонные функции принадлежат множеству $C_1^4(n)$, и бесконечно малая их доля — множеству $C_1^5(n) \oplus C_1^6(n) \oplus \dots \oplus C_1^{t(n)}(n)$. Используя результаты гл. 7 о возможных значениях величины $L(f)$ для монотонных функций, получаем

$$M_1(n) = M_1^4(n) \oplus M_1^5(n) \oplus M_1^6(n) \oplus \dots \oplus M_1^{t(n)}(n),$$

где $M_1^j(n) \subseteq C_1^j(n)$, $M_1^j(n) \neq \emptyset$, $j = 4, \dots, t(n)$.

Все полученные результаты распространяются на классы $M_2(n)$, $M_3(n)$, $M_4(n)$, поскольку

$$M_1(n) = M_2(n) \oplus f_0, \quad \text{где } f_0(x_1, \dots, x_n) \equiv 0;$$

$$M_1(n) = M_3(n) \oplus f_1, \quad \text{где } f_1(x_1, \dots, x_n) \equiv 1;$$

$$M_1(n) = M_4(n) \oplus f_0 \oplus f_1.$$

Функции f_0 , f_1 не зависят существенно от n переменных.

Опишем алгоритм построения минимальных проверяющих тестов монотонных функций, использующий общий алгоритм построения тестов, приведенный в [67].

Пусть $f \in M_1(n)$, f существенно зависит от n переменных. Рассмотрим таблицу M_1 , состоящую из всех наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ таких, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. Заменим в каждом из наборов M_1 нулевые компоненты на Δ . Получаем таблицу интервалов \widetilde{M}_1 .

Будем говорить, что интервал $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta_i \in \{1, \Delta\}$, содержится в интервале $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i \in \{1, \Delta\}$, $i = 1, \dots, n$, и обозначать $\delta \subset \gamma$, если для любого i , $i = 1, \dots, n$, выполняется либо $\delta_i = \gamma_i$, либо $\delta_i = 1$, $\gamma_i = \Delta$.

Вычеркнем из таблицы \widetilde{M}_1 те интервалы, которые содержатся в каком-либо другом интервале \widetilde{M}_1 . Получили таблицу \widetilde{M}_1^* максималь-

ных интервалов, которая соответствует множеству всех нижних единиц функции f .

Далее необходимо выбрать минимальное число интервалов, удовлетворяющих условию: для любого i , $i = 1, \dots, n$, существует интервал $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $\alpha_i = 1$. Это условие выполняется, поскольку $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от n переменных.

Перенумеруем все интервалы таблицы \widetilde{M}_1^* числами $1, \dots, k$. Для каждого i , $i = 1, \dots, n$, выпишем выражение $i_1 \vee \dots \vee i_{k_i}$, где i_j — номера всех интервалов, у которых i -я координата единичная. Составим выражение [67]:

$$\bigwedge_{i=1}^n i_1 \vee \dots \vee i_{k_i}.$$

Оперлируем с номерами i_j как с логическими переменными. Применяя дистрибутивный закон, приводим выражение к виду

$$\bigvee_{i=1}^t i_{s_1} \vee \dots \vee i_{s_t}.$$

Выбираем слагаемые, содержащие минимальное число номеров интервалов. В этих слагаемых заменяем Δ на 0. Получаем множество наборов, выявляющих неисправности вида $x_i \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$.

Чтобы найти минимальное число наборов, выявляющих неисправности вида $x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, поступаем аналогичным образом. Рассматриваем таблицу M_0 , состоящую из всех наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на которых f равна нулю. Заменяем в каждом из наборов M_0 единичные компоненты на Δ , получаем таблицу интервалов \widetilde{M}_0 . Из нее описанным выше способом получаем таблицу максимальных интервалов такую, что для каждого i , $i = 1, \dots, n$, существует интервал $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta_i \in \{0, \Delta\}$, такой, что $\delta_i = 0$. Затем находим минимальное число интервалов, удовлетворяющих этому условию. Заменяем в них Δ на 1. Получаем множество наборов, проверяющих неисправности вида $x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Объединяя эти наборы с наборами, выбранными ранее, получаем минимальный проверяющий тест для данной функции f .

8.4. Классы типа F

Рассмотрим вначале класс F_2^∞ , содержащий монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle a^\infty \rangle$. Учитывая результаты, полученные в главах 6 и 7, получаем

$$F_2^\infty(n) = F_2^{\infty,5}(n) \oplus F_2^{\infty,6}(n) \oplus \dots \oplus F_2^{\infty,t(n)}(n),$$

где $F_2^{\infty,r}(n)$ — все функции f класса $F_2^\infty(n)$, которые имеют $L(f) = r$. Почти все функции из $F_2^\infty(n)$ содержатся в классе $F_2^{\infty,5}(n)$, а все остальные классы не пусты.

Поскольку множества функций, существенно зависящих от n переменных, в классах $F_2^\infty(n)$ и $F_3^\infty(n)$ совпадают, а классы $F_6^\infty(n)$ и $F_7^\infty(n)$ им двойственны, достаточно рассмотреть класс $F_2^\infty(n)$; для классов $F_i^\infty(n)$, $i = 3, 6, 7$, результаты будут аналогичны.

Опишем, как устроены тесты функций класса $F_2^\infty(n)$. Представим этот класс в виде

$$F_2^\infty(n) = F_1(n) \cup F_2(n) \cup \dots \cup F_n(n),$$

где $F_i(n) \subseteq F_2^\infty(n)$, $F_i(n)$ содержит функции, все нули которых имеют нулевую i -ю компоненту. Формула

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv 1, \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv \psi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

задает взаимно-однозначное соответствие между функциями $f \in F_i(n)$ и $\psi \in M_1(n-1)$; согласно лемме 37 гл. 5, $L(f) = L(\psi) + 1$ и минимальные проверяющие тесты функций f и ψ связаны следующим образом:

$$T(\psi) = \{(u_1^1, \dots, u_{i-1}^1, u_{i+1}^1, \dots, u_n^1), \dots, (u_1^k, \dots, u_{i-1}^k, u_{i+1}^k, \dots, u_n^k)\},$$

$$\begin{aligned} T(f) = \{ & (u_1^1, \dots, u_{i-1}^1, 0, u_{i+1}^1, \dots, u_n^1), \dots \\ & \dots, (u_1^k, \dots, u_{i-1}^k, 0, u_{i+1}^k, \dots, u_n^k), (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим классы F_i^μ , $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 3, 4, \dots$. Известно [34], что мощности этих классов асимптотически равны мощностям соответственно классов F_i^∞ , $i = 2, 3, 6, 7$. Следовательно, учитывая структуру вложенности классов Поста, для почти всех функций этих классов имеем аналогичное разложение. Согласно лемме 74 гл. 7 имеем

$$F_i^\mu(n) = F_i^{\mu,5}(n) \oplus F_i^{\mu,6}(n) \oplus \dots \oplus F_i^{\mu,t(n)}(n),$$

где $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 4, 5, \dots$; $F_i^{\mu,j}(n) \subseteq C_1^j(n)$, $j = 5, \dots, t(n)$;

$$F_i^3(n) = F_i^{3,4}(n) \oplus F_i^{3,5}(n) \oplus F_i^{3,6}(n) \oplus \dots \oplus F_i^{3,t(n)}(n),$$

где $i = 2, 3, 6, 7$, $F_i^{3,j}(n) \subseteq C_i^j(n)$, $j = 4, \dots, t(n)$.

Почти все функции классов $F_i^\mu(n)$ содержатся соответственно в классах $F_i^{\mu,5}(n)$, $i = 2, 3, 6, 7$, $\mu = 3, 4, 5, \dots$; а все остальные классы не пусты.

Далее рассмотрим классы $F_i^2(n)$, $i = 2, 3, 6, 7$. В силу двойственности классов F_2^2 , F_3^2 соответственно классам F_6^2 , F_7^2 и тому, что множества функций, существенно зависящих от n переменных, в классах F_6^2 и F_7^2 совпадают, достаточно рассматривать класс F_7^2 — всех монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^2 \rangle$.

Как было замечено выше, тест любой монотонной функции состоит из нижних единиц, образующих 1-множество, и верхних нулей, образующих 0-множество. В случае четного числа переменных из

лемм 58–60 гл. 6 вытекает, что почти все функции f из $F_7^2(n)$ обладают 0-множествами и 1-множествами из двух или трех наборов, расположенных в слоях $E_2^{n, \frac{n}{2}+3}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}+2}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}}$, $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$.

В случае нечетного числа переменных согласно леммам 62 и 63 гл. 6 почти все f из $F_7^2(n)$ имеют 1-множество, состоящее из двух нижних единиц f из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, и 0-множество, состоящее из двух верхних нулей f , один из которых лежит в слое $E_2^{n, \frac{n}{2}+1}$, а другой является противоположным ему набором из слоя $E_2^{n, \frac{n}{2}-1}$.

Таким образом, алгоритм построения минимальных проверяющих тестов для произвольной монотонной функции, описанный выше, можно использовать, рассматривая нижние единицы и верхние нули, расположенные только в указанных выше слоях.

Учитывая лемму 74 гл. 7 и структуру вложений классов Поста, имеем

$$F_i^2(n) = F_i^{2,4}(n) \oplus F_i^{2,5}(n) \oplus F_i^{2,6}(n) \oplus \dots \oplus F_i^{2,t(n)}(n),$$

где $i = 2, 3, 6, 7$; $F_i^{2,j}(n) \subseteq C_1^j(n)$, $j = 4, \dots, t(n)$.

Почти все функции f классов $F_i^2(n)$ содержатся соответственно в классах $F_i^{2,4}(n)$ при n — нечетном, и $4 \leq L(f) \leq 5$ при n — четном, $i = 2, 3, 6, 7$; а все остальные классы не пусты.

Обратимся к классам F_i^∞ , $i = 1, 4, 5, 8$. Достаточно рассмотреть класс F_4^∞ — всех функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty \rangle$. Для других трех классов картина будет аналогичной. Согласно лемме 74 гл. 7 класс $F_4^\infty(n)$ можно разбить на непересекающиеся классы:

$$F_4^\infty(n) = F_4^{\infty,3}(n) \oplus F_4^{\infty,4}(n) \oplus F_4^{\infty,5}(n) \oplus \dots \oplus F_4^{\infty,t(n)}(n),$$

где $F_4^{\infty,r}(n)$ — все функции f класса $F_4^\infty(n)$, которые имеют $L(f) = r$. Почти все функции $F_4^\infty(n)$ содержатся в классах $F_4^{\infty,4}(n)$ и $F_4^{\infty,5}(n)$, а все остальные классы не пусты.

Опишем, как устроены тесты функций множества $F_4^\infty(n)$. Представим его в виде

$$F_4^\infty(n) = F_1(n) \cup F_2(n) \cup \dots \cup F_n(n),$$

где $F_i(n) \subseteq F_4^\infty(n)$, $F_i(n)$ содержит функции, все нули которых имеют нулевую i -ю компоненту. Формула

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv 1, \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv \psi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

задает взаимно-однозначное соответствие между функциями $f \in F_i(n)$ и $\psi \in C_1(n-1)$. Очевидно, что если к наборам минимального прове-

ряющего теста функции $\psi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ добавить нулевую i -ю компоненту, затем добавить набор с единичной i -й компонентой, проверяющей неисправность $x_i = 0$, и прибавить набор с нулевой i -й компонентой для проверки неисправности $x_i = 1$, если ни один из имеющихся уже наборов не проверяет эту неисправность, то получим тест для $f(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, $L(f) \leq L(\psi) + 2$.

С другой стороны, если у всех наборов минимального проверяющего теста функции $f \in F_i(n)$, имеющих i -ю нулевую компоненту, удалить ее, то получим тест для функции $\psi \in C_1(n-1)$. Поскольку один из наборов теста для f имеет единичную i -ю компоненту, получаем $L(f) \geq L(\psi) + 1$. Таким образом, имеем

$$L(\psi) + 1 \leq L(f) \leq L(\psi) + 2.$$

Наконец, рассмотрим классы F_i^μ , $i = 1, 4, 5, 8$, $\mu = 3, 4, \dots$. Известно [34], что мощности этих классов асимптотически равны мощностям соответственно классов F_i^∞ , $i = 1, 4, 5, 8$, и, учитывая лемму 74 гл. 7, получаем, что для этих классов имеет место разложение, аналогичное разложению классов F_i^∞ .

Наконец, для классов F_i^2 , $i = 1, 4, 5, 8$, учитывая теорему 16 гл. 6 и лемму 74 гл. 7, имеем

$$F_i^2(n) = F_i^{2,3}(n) \oplus F_i^{2,4}(n) \oplus \dots \oplus F_i^{2,8}(n) \oplus \dots \oplus F_i^{2,t(n)}(n),$$

где $i = 1, 4, 5, 8$; $F_i^{2,j}(n) \subseteq C_1^j(n)$, $j = 3, \dots, t(n)$. Классы $F_i^{2,j}(n)$, $j = 9, \dots, t(n)$, содержат бесконечно малую долю функций.

8.5. Классы типа D

Начнем с рассмотрения класса D_2 — монотонных самодвойственных функций. Используя результаты теоремы 48 и леммы 75 гл. 6, получаем, что класс $D_2(n)$ можно представить в виде

$$D_2(n) = D_2^4(n) \oplus D_2^6(n) \oplus D_2^8(n) \oplus \dots \oplus D_2^{2k}(n) \oplus \dots \oplus D_2^{t(n)}(n),$$

где $D_2^{2k}(n) \subseteq C_1^{2k}(n)$, $k = 2, 3, \dots, [t(n)/2]$. Все классы непусты и для четного n почти все функции $D_2(n)$ принадлежат $D_2^4(n)$, а для нечетного n — классам $D_2^4(n)$, $D_2^6(n)$.

Для построения проверяющих тестов функций f из $D_2(n)$ заметим, что формула

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \vee \bar{x}_n \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$$

задает взаимно-однозначное соответствие между функциями f из $D_2(n)$ и функциями φ из $F_3^2(n-1)$ — монотонными функциями, зависящими от $(n-1)$ переменной и удовлетворяющими условию $\langle a^2 \rangle$. Имеет место соотношение $L(f) \leq L(\psi) + 2$.

Действительно, пусть

$$T(\varphi) = \{(u_{i_1}, \dots, u_{i_{n-1}}), \dots, (u_{j_1}, \dots, u_{j_{n-1}})\},$$

тогда тестом для f будет множество наборов

$$T(f) = \{(u_{i_1}, \dots, u_{i_{n-1}}, 1), \dots, \\ \dots, (u_{j_1}, \dots, u_{j_{n-1}}, 1), (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0)\}.$$

Итак, тест для функции f из $D_2(n)$ можно получить из теста соответствующей ей функции φ из $F_3^2(n-1)$, дописывая к каждому набору теста функции φ единичную n -ю компоненту и добавляя один набор с нулевой n -й компонентой, проверяющей неисправность $x_n \equiv 1$, и еще, может быть, один набор с единичной n -й компонентой, если ни один другой набор теста неисправность $x_n \equiv 0$ не проверяет.

Рассмотрим последние оставшиеся классы: D_3 — самодвойственных функций, и D_1 — самодвойственных α -функций. Из теоремы 14 гл. 6 следует, что существенная доля самодвойственных функций имеет проверяющие тесты сложности 2 и, следовательно, принадлежит какому-либо из классов $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, и существенная доля функций f из D_3 имеет $3 \leq L(f) \leq 4$. Нетрудно видеть, что для любого $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, найдется функция f из $D_3(n)$, которая принадлежит $Z_i(n)$. Например, в случае нечетного n линейная самодвойственная функция L_n принадлежит $Z_1(n) \cap Z_2(n) \cap \dots \cap Z_{2^{n-1}}(n)$. Учитывая лемму 76 гл. 7, имеем

$$D_3(n) = \\ = D_3^2(n) \oplus D_3^3(n) \oplus D_3^4(n) \oplus \dots \oplus D_3^{2k}(n) \oplus D_3^{2k+1}(n) \oplus \dots \oplus D_3^{t(n)}(n),$$

где $D_3^i(n) \subseteq C_1^i(n)$, $i = 2, 3, \dots, t(n)$. Все классы непусты и почти все функции $D_3(n)$ принадлежат классам $D_3^2(n)$, $D_3^3(n)$, $D_3^4(n)$.

D_1 — класс самодвойственных α -функций. Это функции f с заданными значениями на одной паре противоположных наборов:

$$f(0, \dots, 0) = 0, \quad f(1, \dots, 1) = 1.$$

Класс D_3 можно представить в виде $D_3 = D_1 \oplus \overline{D_1}$, где $\overline{D_1}$ содержит функции, противоположные функциям класса D_1 . Пусть $f \in D_1$, тогда тест функции \overline{f} , $\overline{f} \in \overline{D_1}$, образуют наборы, противоположные наборам теста функции f . Учитывая лемму 76 гл. 7, получаем для класса D_1 разложение, аналогичное разложению для D_3 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные во второй части результаты можно изобразить в виде обобщающей табл. 9.1, в которой представлено распределение величины $L(f)$ для функций, существенно зависящих от n переменных, из классов Поста.

Использованы следующие обозначения.

Если в r -м столбце напротив соответствующих классов стоит знак:

- $+$, то существуют функции f , у которых $L(f) = r$, но они составляют бесконечно малую долю в классах;
- $-$, то в классах не существует функции f , у которой $L(f) = r$;

если знаки $+$ или $-$ из столбцов $r_i, r_{i+1}, \dots, r_{i+k}$ обведены:

- $\boxed{+ \dots +}$ — сплошной линией, то все или почти все функции f из классов имеем $r_i \leq L(f) \leq r_{i+k}$;
- $\boxed{+ \dots +}$ — пунктиром, то существенные доли функций f из классов имеем $r_i \leq L(f) \leq r_{i+k}$.

Эти результаты позволяют осуществить сравнительный анализ сложности контроля управляющих систем, соответствующим различным классам Поста: проблема контроля управляющих систем в рассматриваемой постановке для различных классов Поста имеет количественно и качественно различные решения.

В то же время просматриваются общие закономерности.

Для счетного множества классов Поста почти все функции из этих классов имеют минимальные проверяющие тесты, состоящие из конечного числа наборов, но в каждом из них хотя и не существует функций, зависящих от n переменных, сложность минимальных тестов которых была бы равна в точности $2n$, но имеются функции, сложность минимальных тестов которых равна любому из промежуточных значений, начиная от некоторой определенной для каждого класса константы, до величины, асимптотически равной $2n$, т. е. числу возможных неисправностей рассматриваемого типа.

Таким образом, в каждом из этих классов имеются функции, у которых почти все из числа $2n$ неисправностей проверяются отдельным набором из минимальных тестов каждая. Только конечное число классов

Таблица 9.1.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	$n+1$	$n+2$...	$\sim 2n$
$C_i(n)$, $i=1, 2, 3, 4$	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$L_i(n)$, $i=1, 2, 3, 4, 5$	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	...	-	-	...	-
$S_i(n), P_i(n)$ $i=1, 3, 5, 6$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	...	+	-	...	-
$M_i(n)$, $i=1, 2, 3, 4$	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$D_2(n), n=2p$ $n=2p+1$	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	...	+	-	...	+
	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	...	+	-	...	+
$D_1(n), D_3(n)$	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$F_i^\infty(n), F_i^\mu(n)$, $i=2, 3, 6, 7$, $\mu=4, 5, \dots$	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$F_i^3(n)$, $i=2, 3, 6, 7$	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$F_i^2(n), n=2p$ $n=2p+1$ $i=2, 3, 6, 7$	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$F_i^\infty(n), F_i^\mu(n)$, $i=1, 4, 5, 8$, $\mu=3, 4, \dots$	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+
$F_i^2(n)$, $i=1, 4, 5, 8$	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	...	+	+	...	+

не имеет подобной структуры по сложностям минимальных тестов классов функций: в классах линейных функций типа L все функции имеют минимальные тесты сложности 2, в классах логических сумм и произведений типа S или P сложность минимальных тестов всех функций f равна $n+1$, где n — число существенных переменных этих функций. И, наконец, для класса D_2 — монотонных самодвойственных функций — характеристика сложности минимальных тестов отличается от описанной выше закономерности только тем, что функции из этого класса не могут иметь минимальных тестов, состоящих из нечетного числа наборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А.Е.* О восстановлении пар таблиц по их системам тестов // Тез. докл. IV Всес. конф. по пробл. теор. киб. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1977.
2. *Андреев А.Е.* Об одном классе алгоритмов построения тупиковых тестов // Тез. докл. V Всес. конф. по пробл. теор. киб. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980.
3. *Андреев А.Е.* Некоторые вопросы тестового распознавания образов // ДАН СССР. — 1980. — Т. 255, № 4. — С. 781–784.
4. *Андреев А.Е.* О тупиковых и минимальных тестах // ДАН СССР. — 1981. — Т. 256, № 3. — С. 521–524.
5. *Андреев А.Е.* О качественных и метрических свойствах тестовых алгоритмов / Канд. дис. — Москва, 1981.
6. *Андреев А.Е.* Об асимптотическом поведении числа тупиковых тестов и минимальной длины теста для почти всех таблиц // Пробл. киб. — 1984. — Т. 41. — С. 117–141.
7. *Богомолов А.М., Барашко А.С., Грунский И.С.* Эксперименты с автоматами. — Киев: Наукова думка, 1973.
8. *Богомолов А.М., Грунский И.С., Сперанский Д.В.* Контроль и преобразование дискретных автоматов. — Киев: Наукова думка, 1975.
9. *Богомолов А.М., Твердохлебов В.А.* Диагностика сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1974.
10. *Гасанов Э.Э., Кудрявцев В.Б.* Теория хранения и поиска информации. — М.: Физматлит, 2002.
11. *Горяшко А.П.* Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. — М.: Наука, 1987.
12. *Долотова О.А.* О сложности проверяющих тестов для классов Поста // Труды сем. по дискр. матем. и ее прил. — М.: МГУ, 1989. — С. 233–244.
13. *Долотова О.А.* О сложности проверяющих тестов монотонных функций // Межвуз. темат. сб. науч. тр. — Калинин: Изд-во Калинин. ун-та, 1989.
14. *Долотова О.А.* О сложности контроля логических устройств, реализующих функции из классов Поста // Методы и системы техн. диагн. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 1990. — Т. 14, ч. 1. — С. 20–21.

15. Долотова О.А. О сложности проверяющих тестов функций из класса F_8^2 // Межвузовский тематический сборник научных трудов. — Калинин: Изд-во Калинин. ун-та, 1990.
16. Долотова О.А. О минимальных проверяющих тестах функций из класса F_7^2 // Тез. докл. IX конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Волгоград, 1991. — Ч. 4.
17. Долотова О.А. О сложности единичных проверяющих тестов функций из классов Поста // Тез. докл. IX конф. «Проблемы теоретической кибернетики». — Волгоград, 1991. — Ч. 4.
18. Долотова О.А. О сложности контроля логических схем типа Поста / Канд. дис. — Москва, 1991.
19. Долотова О.А. О сложности минимальных проверяющих тестов для классов Поста // ДАН СССР. — 1992. — Т. 324, № 4. — С. 730–733.
20. Долотова О.А. О Минимальных проверяющих тестах функций из классов Поста // Дискр. матем. — 1993. — Т. 5, № 2. — С. 75–82.
21. Дюкова Е.В. Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 4. — С. 527–530.
22. Дюкова Е.В. Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов для бинарных таблиц // Пробл. киберн. — 1978. — Т. 34. — С. 169–186.
23. Журавлев Ю.И. О несущественных переменных не всюду определенных функций алгебры логики // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1963. — Т. 1. — С. 28–31.
24. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. киберн. — 1978. — Т. 33. — С. 5–68.
25. Кибкало А.А. О вычислении весов признаков в тестовых алгоритмах // VII Всес. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Тез. докл. — Иркутск: 1986. — С. 88–89.
26. Кибкало А.А. О вычислении информационных весов признаков по системе тестов // Алгебра, логика и теория чисел. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 44–48.
27. Кибкало А.А. Об алгоритмах распознавания образов, использующих короткие тесты // Вестник Моск. Универ. Математика, механика. — 1988.
28. Константинов Р.М., Королева З.Е. Применение тестовых алгоритмов к задачам геологического прогнозирования // Распознавание образов. Тр. Межд. симп. 1971 г. по практ. примен. методов распознавания образов. — М.: ВЦ АН СССР, 1973. — С. 194–199.
29. Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б. Комбинаторно-логический подход к задачам прогноза рудоносности // Пробл. киберн. — 1976. — Т. 31. — С. 5–33.

30. Королева З.Е. О сравнении тестовых алгоритмов распознавания // Ж. выч. матем. и матем. физики. — 1975. — Т. 15, № 3. — С. 749–756.
31. Коршунов А.Д. О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц // Кибернетика. — 1970. — № 6. — С. 17–25.
32. Коршунов А.Д. О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц // Кибернетика. — 1971. — № 1. — С. 1–11.
33. Коршунов А.Д. О числе монотонных булевых функций // Пробл. киберн. — 1981. — Т. 38. — С. 5–109.
34. Коршунов А.Д. О мощности и структуре некоторых замкнутых классов Поста // ДАН СССР. — 1987. — Т. 295, № 3. — С. 533–537.
35. Коспанов Э.Ш. Об одном алгоритме построения достаточно простых тестов // Дискр. анализ. — Новосибирск, 1966. — Т. 8. — С. 43–47.
36. Кренделев Ф.П., Дмитриев А.Н., Журавлев Ю.И. Сравнение геологического строения зарубежных месторождений докембрийских конгломератов с помощью дискретной математики // ДАН СССР. — 1967. — Т. 173, № 5.
37. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
38. Лупанов О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов // Пробл. киберн. — 1962. — Т. 7. — С. 61–114.
39. Мадатян Х.А. Полный тест для неповторных контактных схем // Пробл. киберн. — 1970. — Т. 23. — С. 103–118.
40. Мадатян Х.А. Построение единичных тестов для контактных схем // Сб. работ по матем. киберн. — М.: ВЦ АН СССР, 1981. — С. 77–86.
41. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — М.: Мир, 1964.
42. Мошков М.Ю. Условные тесты // Пробл. киберн. — 1983. — Т. 40. — С. 131–170.
43. Носков В.Н. О тупиковых и минимальных тестах для одного класса таблиц // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1968. — Т. 12. — С. 27–49.
44. Носков В.Н., Слепян В.А. О числе тупиковых тестов для некоторого класса таблиц // Кибернетика. — 1972. — № 1. — С. 60–65.
45. Носков В.Н. Диагностические тесты для входов логических устройств // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. — Т. 26. — С. 72–83.
46. Носков В.Н. О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1975. — Т. 27. — С. 23–51.
47. Носков В.Н. О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Матем. зам. — 1975. — Т. 18, № 1. — С. 137–150.

48. Носков В. Н. О тупиковых и минимальных местах для одного класса таблиц // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. — Т. 12. — С. 27–49.
49. Орэ О. Теория графов. — М.: Наука, 1963.
50. Пархоменко П. П. Диагноз технического состояния дискретных устройств методом выделения подозреваемых неисправностей. Комбинационные устройства. Устойчивые неисправности // Автом. и телемех. — 1971. — № 6. — С. 26–137.
51. Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Основы технической диагностики. — М.: Энергоиздат, 1981.
52. Погосян Г. Р. О длине проверяющих тестов для одного класса неисправностей логических устройств // Дискр. матем. и матем. киберн. — М.: Наука, 1981. — С. 140–145.
53. Погосян Г. Р. О проверяющих тестах для логических схем. — М.: ВЦ АН СССР, 1982.
54. Погосян Г. Р. О сложности проверяющих тестов для логических устройств / Канд. дис. — Москва, 1982.
55. Погосян Г. Р. О длине проверяющих тестов для логических схем // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263, № 3.
56. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискр. анализа в исслед. экстрем. структур. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — Т. 39. — С. 80–87.
57. Редькин Н. П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискр. анализа в оптим. управл. систем. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — Т. 40. — С. 87–99.
58. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1986. — № 1. — С. 72–74.
59. Слепян В. А. Вероятностные характеристики распределения тупиковых тестов // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1968. — Т. 12. — С. 50–74.
60. Слепян В. А. Параметры распределения тупиковых тестов и информационные веса столбцов в бинарных таблицах // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1969. — Т. 14. — С. 28–43.
61. Слепян В. А. О числе тупиковых тестов и о мерах информативности столбцов для почти всех бинарных таблиц // ДАН СССР. — 1970. — Т. 191, № 1. — С. 35–38.
62. Слепян В. А. Асимптотика среднего числа тупиковых тестов // Кибернетика. — 1970. — № 4. — С. 57–65.
63. Слепян В. А. Длина минимального теста для некоторого класса таблиц // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1973. — Т. 23. — С. 59–71.
64. Соловьев Н. А. О максимальном числе тупиковых тестов // Кибернетика. — 1972. — № 1. — С. 28–30.

65. Соловьев Н.А. Безусловные минимальные тесты для таблиц с разделенными блоками единиц // Дискр. анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1972. — Т. 20. — С. 22–65.
66. Соловьев Н.А. Тесты (теория, построение, применение). — Новосибирск: Наука, 1978.
67. Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова, АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
68. Шейнбергас И.М. О числе функций в F_i^μ , $i = 1, 4, 5, 8$ // Матем. зам. — 1970. — Т. 8. № 1.
69. Яблонский С.В., Чегис И.А. О тестах для электрических схем // УМН — 1955. — Т. 10, вып. 4(66). — С. 182–184.
70. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
71. Яблонский С.В., Демидова Н.Г., Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б., Сиротинская С.В. Тестовый подход к количественной оценке геолого-структурных факторов и масштабов оруднения (на примере ртутных месторождений) // Геология рудных месторождений. — 1971. — Т. 13, № 2. — С. 30–42.
72. Яблонский С.В. О построении тупиковых кратных экспериментов для автоматов // Тр. МИАН СССР. — 1973. — Т. 83. — С. 263–272.
73. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
74. Яблонский С.В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ, 1986. — С. 7–12.
75. Яблонский С.В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Матем. вопросы киберн. — 1988. — Т. 1. — С. 5–25.
76. Moore E.F. Gedanken-experimentson sequental machines. Automata studies edited by Shannon C., McCarty J. — Princeton University Press, 1956. — P. 129–153. [Рус. пер.: Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 179–210.]
77. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton, 1941.
78. Weiss C.D. Bounds on the length of terminal stuck-fault tests // «IEEE, Trans. on comput.», v. 21, № 3, P. 305–309.



Кудрявцев Валерий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, академик, заведующий кафедрой математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Специалист в области кибернетики, дискретной математики, информатики. Им получены фундаментальные результаты в теории автоматов, дискретных функций, распознавания образов, интеллектуальных систем, которые изложены в 14 книгах, более чем 120 статьях и 35 патентах США. Руководитель научной школы, включающей 26 докторов и более 55 кандидатов наук — его учеников. Заслуженный деятель науки

России, почетный доктор Белградского университета, почетный член Международного биографического общества (Кембридж). Главный редактор журнала «Интеллектуальные системы», зам. главного редактора журнала «Дискретная математика». E-mail: kudryavtsev@lsili.ru.

Dr. Valerij Borisovich KUDRYAVTSEV (Dr. Sci., Academician) is Professor of Mathematics at Moscow State University, where he is the founding leader of the Department of Mathematical Theory of Intellectual Systems at the Division of Mechanics and Mathematics. His research focuses on Mathematical Cybernetics, Discrete Mathematics and Informatics. He is internationally well known for his groundbreaking work on Automata Theory, Theory of Discrete Functions, Pattern Recognition Theory and Theory of Intellectual Systems and has authored 14 monographs, more than 120 journal articles and has obtained over 35 US patents. The Scientific School headed by Dr. Kudryavtsev has produced 26 Doctors of Sciences (advanced doctorate degree in Russia) and more than 55 Ph.D. recipients. He has received many honors and awards including an Honorary Doctorate from Belgrade University. He is furthermore an Honored Scientist of Russia and an Honorary Member of the International Biographical Centre (Cambridge, U.K.). He is the Editor-in-chief of the journal «Intellectual Systems» and Deputy Editor-in-chief of the journal «Discrete Mathematics and Applications».

Гасанов Эльяр Эльдарович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Специалист в области кибернетики, дискретной математики, информатики. Им получены фундаментальные результаты в теории управляющих систем и математической теории информационного поиска, которые изложены в более чем 100 научных статьях. Интересы в области приложений связаны с синтезом сверх больших интегральных схем. Результаты в этой области подтверждены более чем 20 патентами США. Член редакционной коллегии журнала «Интеллектуальные системы». E-mail: gasanov@lsili.ru.



Dr. Elyar Eldarovich GASANOV (Dr.Sci.) is Professor of Mathematics at the department of Mathematical Theory of Intellectual Systems in the Division of Mechanics and Mathematics at Moscow State University. His research focuses on Mathematical Cybernetics, Discrete Mathematics and Informatics. He is well-known for his work on the Theory of Control Systems and Information Search Theory and has authored more than 100 articles in his field. His interests in applied sciences focus on the synthesis of very large scale integration circuits (placement, routing and timing optimization problems) and have led to over 20 US patents. He is a member of the Editorial Board of the journal «Intellectual Systems».

Долотова Оксана Александровна — кандидат физико-математических наук, область научных интересов: теория контроля управляющих систем. Защитила кандидатскую диссертацию в Московском Государственном университете им. М. В. Ломоносова по теме: «О сложности контроля логических схем типа Поста». Ею решена проблема контроля применительно ко всем классам Поста при возможных константных неисправностях одиночного типа на входах логических устройств. Автор 8 научных статей.



Dr. Oxana Alexandrovna DOLOTOVA received his Ph.D. in Theoretical Computer Science from Moscow State University. Her research focuses on Mathematical Cybernetics and Testing Theory for Logic Circuits. She solved the testing problem for all Post classes in case of single constant input faults. She is an author of 8 articles.



Погосян Грант Рафаелович — профессор математики и информатики Международного Христианского Университета Токио, Япония. После окончания механико-математического факультета МГУ он защитил кандидатскую диссертацию в Вычислительном Центре АН СССР. До вступления в настоящую должность в Японии в 1991 году преподавал в МГУ и в Государственном Техническом Университете Армении. Он был приглашенным профессором в разных университетах мира, включая Монреальский Университет (1997–1998, Канада), Ратгерс Университет (1999–2000, США), Парижский Эколь Нормаль Сьюпериор (2005, Франция) и в настоящее время (2006) является Колмогоров-

ским приглашенным профессором математики в МГУ. Его основные научные публикации относятся к области дискретной математики и теоретической кибернетики, в частности, к теории клонов в универсальных алгебрах, к проблемам оптимизации и характеристизации функций алгебры логики и теории тестирования логических схем.

Dr. Grant R. POGOSYAN is Professor of Mathematics and Computer Science at the International Christian University (ICU) in Tokyo, Japan. He holds the equivalents of the B.Sc. and M.Sc. degrees in Mathematics from Moscow State University and received his Ph.D. in Theoretical Computer Science from the Computer Center of the USSR Academy of Sciences. Before joining ICU in 1991, he was affiliated with Moscow State University and the State Engineering University of Armenia. He has held Visiting Professorships at several universities around the world, including the University of Montreal (1997–1998, Canada), Rutgers University (1999–2000, U.S.A.) and Ecole Normale Superieure in Paris (2005, France), and currently holds the prestigious Kolmogorov Visiting Professorship of Mathematics at Moscow State University. His research focuses on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. He has published numerous articles on problems of Clone Lattices in Universal Algebra, Optimization and Characterization of Logic Functions and Testing Theory for Logic Circuits.